Corrigé du test n°1 : complexes

Cours

Voir le cours !

Exercices

1) $\dfrac{3+4i}{1-2i} = \dfrac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3+4i+6i-8}{1^2+2^2} = \dfrac{-5+10i}{5} = -1+2i.$

2) (a) La valeur $1+i$ est “valeur interdite”. Cette petite précaution étant prise, multiplions les deux membres par $1+i-z$:

$$\frac{2z+i}{1+i-z} = 2i \iff 2z+i = 2i(1+i-z) \iff 2(1+i)z = i-2 \iff z = \frac{i-2}{2(1+i)} = \frac{-1+3i}{4}$$

(b) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = \left(z-\sqrt{2}\right)^2 + 3 = \left(z-\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(z-\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)$, donc les deux solutions sont $\sqrt{2} \pm i\sqrt{3}$.

3) (a) La valeur interdite est ici 1. Posons $z = x+iy$. L'équation se traduit par :

$$\frac{2iz+1}{\overline{z}-1} = 2 \iff 2iz+1 = 2(\overline{z}-1) \iff 2i(x+iy)+1 = 2(x-iy-1) \iff -2x-2y+3+i(2x+2y) = 0$$

Un nombre complexe étant nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, cette équation se traduit par :

$$\begin{cases} -2x-2y+3=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Cette équation n'a donc pas de solutions.
Une solution alternative : on écrit le système formé par l'équation et sa conjuguée, et on résout ce système en les deux inconnues z et $\overline{z}$:

$$\begin{cases} 2iz+1 = 2(\overline{z}-1) \\ -2i\overline{z}+1 = 2(z-1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2iz-2\overline{z} = -3 \\ -2z-2i\overline{z} = -3 \end{cases}$$

et on retrouve l'absence de solution en constatant une contradiction après avoir multiplié la deuxième équation par $-i$.

(b) $Z = 4x-y+3+i\left((x-1)^2+y^2-3\right)$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, soit si $4x-y+3=0$. Ceci est l'équation d'une droite du plan, d'équation réduite $y = 4x+3$.

4) $\overline{Z_1} = \dfrac{(3-\overline{z})(-5+2i)}{-2i-\overline{z}}$.

5) Pour montrer que ce complexe est réel, il suffit de montrer qu'il est égal à son conjugué :

$$\overline{\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}(z-\overline{z})^2}} = \frac{\overline{z}+z}{\overline{z}z(\overline{z}-z)^2} = \frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}(z-\overline{z})^2}$$

6) $|\overline{-z_1}| = |\overline{z_1}| = r_1 = |\overline{z_1}|$, $\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|} = \dfrac{1}{r_1}$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{r_1}{r_2}$.