Corrigé du test n°4 : récurrence et suites

1) **Récurrence**

Notons $\mathscr{P}_n$ l'hypothèse : "$4^n - 1$ est divisible par 3".

- $\mathscr{P}_0$ est vraie, puisque $4^0 - 1 = 0$ est bien divisible par 3.
- Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3 = 4u_n + 3$$

Or par hypothèse, u_n est divisible par 3, donc $4u_n$ l'est aussi, et 3 est divisible par 3 (!), donc leur somme u_{n+1} l'est aussi, et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in_N$, et $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \in_N$.

2) **Suite "arithmético-géométrique"**

(a) (v_n) vérifie la relation de récurrence :

$$v_{n+1} - a = \frac{1}{3}(v_n - a) - 1 \iff v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}a - 1$$

(v_n) est donc géométrique (de raison $\frac{1}{3}$) si et seulement si $\frac{2}{3}a - 1 = 0$, soit si $a = \frac{3}{2}$.

(b) On a $v_0 = u_n + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.

(c) S'_n est la somme des $n+1$ premiers termes dune suite géométrique, donc :

$$S'_n = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

On a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \frac{3}{2} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2} = S'_n - \frac{3}{2}(n+1) = \frac{21}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - \frac{3}{2}(n+1)$$

3) **Représentation graphique d'une suite récurrente**

Revoir le cours si cette construction n'est pas encore claire dans votre tête.