1) **Récurrence**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2) **Suite "arithmético-géométrique"**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$.

(a) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$. Calculer a de sorte que la suite (v_n) soit géométrique.

(b) Pour cette valeur de a, calculer v_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.

(c) Exprimer $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Exprimer S_n en fonction de n.

En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

3) **Représentation graphique d'une suite récurrente**

On considère le graphe de la fonction f fourni en annexe, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Construire sur la courbe les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

---

1) **Récurrence**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2) **Suite "arithmético-géométrique"**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$.

(a) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$. Calculer a de sorte que la suite (v_n) soit géométrique.

(b) Pour cette valeur de a, calculer v_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.

(c) Exprimer $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Exprimer S_n en fonction de n.

En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

3) **Représentation graphique d'une suite récurrente**

On considère le graphe de la fonction f fourni en annexe, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Construire sur la courbe les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

---

1) **Récurrence**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

2) **Suite "arithmético-géométrique"**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$.

(a) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$. Calculer a de sorte que la suite (v_n) soit géométrique.

(b) Pour cette valeur de a, calculer v_n en fonction de n, en déduire u_n en fonction de n.

(c) Exprimer $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Exprimer S_n en fonction de n.

En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

3) **Représentation graphique d'une suite récurrente**

On considère le graphe de la fonction f fourni en annexe, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Construire sur la courbe les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.