

Correction du DM n°1

Exercice 1 : 115 p.27

Trouvez les entiers naturels tels que : $xyz = 4(x + y + z)$, avec $0 < x \leq y \leq z$.

Cet exercice ressemble à l'exercice 43 p.22, mais on va essayer de réduire un peu les valeurs possibles de x , y et z à l'aide d'arguments de divisibilité.

Soit¹ (x, y, z) un triplet solution du problème. Commençons par constater que $0 < x \leq y \leq z$ entraîne :

$$x^2z \leq xyz = 4(x + y + z) \leq 4(z + z + z) = 12z$$

donc $x^2z \leq 12z$, qu'on peut simplifier par z puisque $z > 0$: $x^2 \leq 12$, soit puisque x est entier, $x \leq 3$. les valeurs possibles de x sont donc 1, 2 et 3. Analysons chaque cas :

- $x = 1$: le problème se réécrit alors $yz = 4(1 + y + z)$, avec $1 \leq y \leq z$. Comme précédemment, on peut majorer y :

$$yz = 4(1 + y + z) \leq 4(1 + 2z) \leq 12z$$

d'où $1 \leq y \leq 12$. Cela laisse douze cas simples à analyser. On pourrait étudier l'équation du premier degré en z associée à chaque cas, mais on va chercher encore à réduire le nombre de cas.

Pour cela, constatons que l'équation se réécrit :

$$yz = 4 + 4y + 4z \iff (y - 4)z = 4 + 4y$$

Ainsi, $y - 4$ est un diviseur de $4 + 4y$. Donc $y - 4$ doit être un diviseur de $(4 + 4y) - 4(y - 4) = 20$. Ainsi $y - 4$ divise 20, et

$$y \in \{5; 6; 8; 9; 14; 20\} \cap [1; 12] = \{5; 6; 8; 9\}$$

Ne restent donc que quatre cas à étudier :

- $y = 5$: l'équation s'écrit $5z = 4(6 + z)$, soit $z = 24$,
- $y = 6$: l'équation s'écrit $6z = 4(7 + z)$, soit $z = 14$,
- $y = 8$: l'équation s'écrit $8z = 4(9 + z)$, soit $z = 9$,
- $y = 9$: l'équation s'écrit $9z = 4(10 + z)$, soit $z = 8$, qui ne convient pas car on doit avoir $z \geq y = 9$.

Restent donc trois triplets solutions potentiels : $(1; 5; 24)$, $(1; 6; 14)$ et $(1; 8; 9)$. On vérifie qu'ils conviennent tous les deux².

¹Cette phrase introduit un *raisonnement par analyse-synthèse*, dans le quel on va d'abord trouver des conditions nécessaires pour qu'un couple soit solution. La synthèse consistera alors simplement à tester les triplets non éliminés par l'analyse (condition suffisante).

²On aurait pu écrire aussi l'équation sous la forme $y(z - 4) = 4 + 4z$, ce qui aurait montré que z devait lui aussi appartenir à l'ensemble $\{5; 6; 8; 9\}$, puis tester les cas possibles $(1; 5; 5)$, $(1; 5; 6)$, $(1; 5; 8)$, $(1; 5; 9)$, $(1; 6; 6)$, ... sans résoudre d'équation.

- $\boxed{x = 2}$: le problème se réécrit alors $2yz = 4(2 + y + z)$, avec $2 \leq y \leq z$.

On doit comme précédemment avoir : $2yz \leq 12z$ soit $y \leq 6$, et $(y - 2)z = 4 + 2y$, donc

$$\left. \begin{array}{l} y - 2 \mid y - 2 \\ y - 2 \mid 4 + 2y \end{array} \right\} \text{ d'où } y - 2 \mid (4 + 2y - 2(y - 2)) = 8 \text{ soit } y \in \{3; 4; 6\}$$

- $\boxed{y = 3}$: l'équation s'écrit $3z = 2(5 + z)$, soit $z = 10$,
- $\boxed{y = 4}$: l'équation s'écrit $4z = 2(6 + z)$, soit $z = 6$,
- $\boxed{y = 6}$: l'équation s'écrit $6z = 2(8 + z)$, soit $z = 4$, qui ne convient pas.

Deux nouveaux triplets potentiels ont été trouvés : $(2; 3; 10)$ et $(2; 4; 6)$, convenant tous les deux.

- $\boxed{x = 3}$: le problème se réécrit alors $3yz = 4(3 + y + z)$, avec $3 \leq y \leq z$.

On doit comme précédemment avoir : $3yz \leq 12z$ soit $y \leq 4$, et $(3y - 4)z = 12 + 4y$, donc

$$\left. \begin{array}{l} 3y - 4 \mid 12 + 4y \\ 3y - 4 \mid 3y - 4 \end{array} \right\} \text{ d'où } 3y - 4 \mid (3(12 + 4y) - 4(3y - 4)) = 20$$

d'où $3y - 4 \in \{1; 2; 5; 10; 20\}$ soit finalement $y \in \{2; 3; 8\}$, seule l'hypothèse $y = 3$ devant être testée :

- $\boxed{y = 3}$: l'équation s'écrit $9z = 4(6 + z)$, qui n'a pas de solution entière.

Au final, cinq triplets sont solutions du problème posé :

$$\mathcal{S} = \{(1; 5; 24), (1; 6; 14), (1; 8; 9), (2; 3; 10), (2; 4; 6)\}$$

Si l'on veut tous les triplets d'entiers non nuls *sans contrainte sur l'ordre des termes*, il suffit de permuter les membres des triplets ci-dessus, ce qui donne trente solutions.

Exercice 2

Montrer que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Il suffit d'écrire la somme cherchée sous une forme faisant apparaître le *facteur* 3 cherché. Considérons trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$. On a³ :

$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

La présence du facteur 3 répond immédiatement à la question.

Remarquons qu'on aurait pu prendre d'autres entiers consécutifs : n , $n + 1$ et $n + 2$ par exemple, mais le calcul, moins symétrique, aurait été moins agréable.

³en vertu de la bien connue identité remarquable : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, provenant du *binôme de Newton*