Correction du DM n°2

Exercice 1 : 109 p.26

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$, où a est un entier naturel non nul. Par exemple, $13 \in E$ car $10 = 9 + 2^2$.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1) **Étude de l'équation d'inconnue $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a^2 + 9 = 2^n}$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{4}$**
   - (a) Montrez que si a existe, a est impair.
   - (b) En raisonnant modulo 4, montrez que l'équation proposée n'a pas de solution.
2) **Étude de l'équation d'inconnue $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a^2 + 9 = 3^n}$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{3}$**
   - (a) Montrez que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou 3 modulo 4.
   - (b) Montrez que si a existe, il est pair et déduisez-en que nécessairement n est pair.
   - (c) On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduisez d'une factorisation de $3^n - a^2$ que l'équation proposée n'a pas de solution.
3) **Étude de l'équation d'inconnue $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a^2 + 9 = 5^n}$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{2}$**
   - (a) En raisonnant modulo 3, montrez que l'équation est impossible si n est impair.
   - (b) On pose $n = 2p$, en s'inspirant du 2c), démontrez qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ est une puissance entière de 5.

1) (a) Si a est solution de l'équation, comme $n \geqslant 4$, $2^n = a^2 + 9$ est pair, donc a^2 est impair, ce qui ne peut se produire que si a est impair (le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair).

   (b) Comme $n \geqslant 4$, $2^n = 4 \times 2^{n-2}$ est un multiple de 4, donc $2^n \equiv 0 \pmod 4$.
   Cherchons le reste de $a^2 + 9$ modulo 4 :

$a \pmod 4$	0	1	2	3
$a^2 \pmod 4$	0	1	0	1
$a^2 + 9 \pmod 4$	1	2	1	2

   Ainsi, on n'a jamais $a^2 + 9 \equiv 0 \pmod 4$, donc l'équation $a^2 + 9 = 2^n$ ne peut avoir de solution pour $n \geqslant 4$ (et il est facile de se rendre compte qu'elle n'en a pas non plus pour $n \leqslant 3$, puisque dans ce cas $2^n \leqslant 8 < a^2 + 9$).

2) (a) $3 \equiv -1 \pmod 4$, donc par compatibilité des congruences avec les puissances, $3^n \equiv (-1)^n \pmod 4$, soit plus précisément :

$$3^n \equiv \begin{cases} 1 \pmod 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 \equiv 3 \pmod 4 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   (b) Pour $n \geqslant 3$, 3^n est impair, donc $a^2 + 9$ est impair, donc a^2 est pair, ce qui ne peut se produire que si a est pair.
   a est donc congru à 0 ou 2 modulo 4, et d'après le tableau précédent, $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod 4$. Or $3^n \equiv 1 \pmod 4$ équivaut d'après la question précédente à n pair.

   (c) Si n est pair, on peut écrire $n = 2p$, avec p entier. Le fait que $n \geqslant 3$ entraîne $p \geqslant 2$.
   On a alors :

$$a^2 + 9 = 3^{2p} \iff 9 = 3^{2p} - a^2 = (3^p)^2 - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$$

   $3^p - a$ et $3^p + a$ sont donc des diviseurs de 9, $3^p + a$ étant le plus grand des deux.
   Comme $p \geqslant 2$, $3^p \geqslant 9$, donc la seule possibilité est $3^p + a = 9$, soit $p = 2$ et $a = 0$. Or il se trouve que ceci ne convient pas, car alors $a^2 + 9 = 9 \neq 3^{2\times 2} = 81$.

L'équation $a^2+9=3^n$ n'a donc pas de solution pour $n \geqslant 3$ (par contre, pour $n=2$, on a une solution : $a=0$, mais l'énoncé initial n'autorise pas cette possibilité).

3) (a) $5 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$, donc $5^n \equiv (-1)^n \pmod 3$.
D'autre part, les restes modulo 3 de a^2+9 sont :

$a \pmod 3$	0	1	2
$a^2 \pmod 3$	0	1	1
$a^2+9 \pmod 3$	0	1	1

Ainsi pour que l'équation $a^+9=5^n$ ait une solution, il est nécessaire que les restes modulo 3 soient égaux à 1, ce qui entraîne en particulier n pair (et a non multiple de 3, mais nous n'utiliserons pas cette condition).

(b) Comme plus haut, de n pair, on tire l'écriture $n=2p$, avec ici $p \geqslant 1$ puisque $n \geqslant 2$. On a alors :

$$a^2+9=5^{2p} \iff 9=5^{2p}-a^2=(5^p)^2-a^2=(5^p-a)(5^p+a)$$

Encore une fois, $5^p \pm a$ doit diviser 9, et en particulier le plus grand des deux facteurs, à savoir 5^p+a, doit être égal à 3 ou 9.
Le premier cas est exclus puisque $5^p+a \geqslant 5 > 3$, donc ne reste que la possibilité $5^p+a=9$, soit $p=1$ et $a=4$ ($p \geqslant 1$ entraîne $5^p \geqslant 25 > 9$).
On vérifie pour terminer qu'on tient bien une solution : pour $n=2$ et $a=4$, on a : $a^2+9=25$ et $5^n=25$.

Exercice 2 : 107 p.26
x et y sont des entiers relatifs.
Résolvez le système : $\left\{\begin{array}{l} 3x+y \equiv 1 \pmod 6 \\ x-y \equiv 3 \pmod 6 \end{array}\right.$.

Encore une fois, on va procéder par analyse-synthèse, en cherchant d'abord une forme nécessaire des couples solutions, puis en sélectionnant ceux des couples restant qui sotn effectivement solution.

Soit donc (x,y) un couple solution. Par compatibilité des congruences avec la somme, on déduit, en sommant les deux équations, que

$$(3x+y)+(x-y)=4x \equiv 1+3=4 \pmod 6$$

N'en déduisons pas trop hâtivement que $x \equiv 1 \pmod 6$, les congruences ne sont **pas** compatibles avec la division ! Recensons plutôt les restes modulo 6 de $4x$:

$x \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$4x \pmod 6$	0	4	2	0	4	2

Ainsi $4x \equiv 4 \pmod 6$ équivaut à $x \equiv 1$ ou $x \equiv 4$ modulo 6. Étudions chacun de ces deux cas :

- $\boxed{x \equiv 1 \pmod 6}$: l'équation $x-y \equiv 3 \pmod 6$ donne alors $y \equiv x-3=-2 \equiv 4 \pmod 6$, et on vérifie que les couples de la forme $\left(1+6k, 4+6k'\right)$, avec k et k' entiers, sont bien solution :

$$\begin{aligned} 3(1+6k)+\left(4+6k'\right) &= 7+6\left(3k+k'\right) \equiv 1 \pmod 6 \\ \text{et} \quad (1+6k)-\left(4+6k'\right) &= -3+6\left(k-k'\right) \equiv 3 \pmod 6 \end{aligned}$$

- $\boxed{x \equiv 1 \pmod 6}$: ici, l'équation $x-y \equiv 3 \pmod 6$ donne alors $y \equiv x-3=1 \pmod 6$, et on vérifie encore que les couples de la forme $\left(4+6k, 1+6k'\right)$, avec k et k' entiers, sont bien solution.

En conclusion, les couples solutions sont les couples (x,y), avec $x \equiv 1 \pmod 6$ et $y \equiv 4 \pmod 6$, ou bien $x \equiv 4 \pmod 6$ et $y \equiv 1 \pmod 6$.