DS n°1 : arithmétique

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse :

1) Les entiers a et b étant donnés, il existe un unique couple (q, r) d'entiers tel que $a = bq + r$.
2) $a \equiv b \pmod 8$ équivaut à $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$.
3) Dans la division euclidienne de 10^{2006} par 15, le reste est 10.
4) Si on écrit la suite de tous les entiers de 1 à 10000, on utilise 4000 fois le chiffre 4.
5) L'écriture décimale de l'entier 100! se termine par 24 zéros.

Restitution organisée de connaissances, et application

On suppose connus les pré-requis suivants :

- Deux entiers a et b sont dits *congrus modulo* m, ce que l'on note $a \equiv b \pmod m$, si m divise $b - a$.
- Si quatre entiers a, b, c et d vérifient $a \equiv b \pmod m$ et $c \equiv d \pmod m$, alors $a + c \equiv b + d \pmod m$ et $ac \equiv bd \pmod m$.

1) **Démonstration de cours**

   Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a \equiv b \pmod m$. Montrer que :

   (a) pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \pmod m$,

   (b) pour tout entier relatif c, $ac \equiv bc \pmod m$.

2) **Exercice**

   Soit n un entier naturel non nul qui n'est ni un multiple de 3, ni un multiple de 7.

   (a) Démontrer que : $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ et $n^6 \equiv 1 \pmod 7$.
   En déduire que : $n^{37} \equiv n \pmod 3$ et $n^{37} \equiv n \pmod 7$.

   (b) Montrer que $\frac{10}{21}n^{37} + \frac{11}{21}n$ est un entier naturel.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$u_0 = 14 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{n+1} = 5u_n - 6$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ? Se vérifie-t-elle sur u_5 et u_6 ?
2) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.
3) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

Exercice 2

On se propose de démontrer, en raisonnant modulo 4, que l'équation $x^2 + 3y^2 = 942$ n'a pas de solution.

1) Écrire les restes modulo 4 possibles de x^2, puis de $3y^2$.
2) Construire une table permettant de lire les restes modulo 4 de $x^2 + 3y^2$.
3) Déduire de cette table que l'équation $x^2 + 3y^2 = 942$ n'a pas de solution.