Le raisonnement par récurrence

Lors du cours sur les suites en première S, on a énoncé un certain nombre de résultats concernant les suites, sans pouvoir les démontrer de façon rigoureuse. Par exemple le fait que si (u_n) est arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Le problème à chaque fois résidait dans les “petits points” qu'on écrit pour dire “et on répète ces opérations jusqu'à n”. Le principe de raisonnement par récurrence va permettre de justifier tout cela.

1 Principe du raisonnement par récurrence

Théorème 1

$\mathscr{P}_n$ est une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie (on dit que la propriété est *initialisée* ou *fondée*),
- pour tout entier n, $\mathscr{P}_n$ vraie entraîne $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (on dit que la propriété est *héréditaire*),

alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve *(Hors programme)*

Supposons que $\mathscr{P}_n$ ne soit pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et notons n_0 le plus petit entier n pour lequel $\mathscr{P}_n$ est fausse.

On a donc : $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $0 \leqslant n < n_0$, et $\mathscr{P}_{n_0}$ est fausse.

n_0 n'est pas égal à 0, puisque par hypothèse $\mathscr{P}_0$ est vraie. Donc on peut considérer l'entier $n_0 - 1$.

Comme on vient de le voir, $\mathscr{P}_{n_0-1}$ est vraie, mais alors l'hérédité de la propriété entraîne que $\mathscr{P}_{n_0}$ est encore vraie, ce qui est absurde.

Donc notre hypothèse initiale conduit à une contradiction, il est donc faux de supposer que $\mathscr{P}_n$ n'est pas vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 1 :

- Les deux hypothèses sont essentielles dans ce principe : une hypothèse de récurrence peut parfaitement être héréditaire... mais fausse pour tout n si elle ne l'est pas au moins pour $n = 0$.
- La démonstration de l'hérédité gène souvent les élèves, car ils ont l'impression de démontrer $\mathscr{P}_n$ pour tout n.

  En fait, il n'en est rien. On ne dit rien dans cette étape sur la véracité de $\mathscr{P}_n$ ni sur celle de $\mathscr{P}_{n+1}$. La seule chose qui nous intéresse est *le lien* qui existe entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. On démontre :

$$\mathscr{P}_n \boxed{\Longrightarrow} \mathscr{P}_{n+1}$$

sans *affirmer* ni que $\mathscr{P}_n$ est vraie, ni que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vrai.

C'est l'initialisation qui transmettra à la fin du raisonnement le caractère vrai de $\mathscr{P}_0$ à tous ses successeurs.

Insistons bien encore une fois sur la manière de rédiger cette étape : supposons $\mathscr{P}_n$ vrai **pour un certain indice** n, et démontrons **qu'alors** $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vrai.

- Il se peut que la propriété $\mathscr{P}_n$ ne soit pas définie pour les premiers indices. En fait, on peut généraliser le principe ci-dessus en modifiant l'hypothèse d'initialisation : si l'on démontre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, et qu'elle est vraie pour un certain rang n_0, alors on peut conclure qu'elle est vraie pour tout les entiers n supérieurs à n_0 (on dit alors qu'elle est vraie sur "l'intervalle" $[\![n_0;\infty[\![$).

2 Des exemples

EXEMPLE 1 : Démontrons avec ce principe la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique en fonction de n.

On a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = a$ est pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = a + nr$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = a + 0 \times r = a$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier* n, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = a + (n+1)\,r$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} u_n + r \underset{\mathscr{P}_n}{=} (a + nr) + r = a + (n+1)\,r$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 2 : Un autre exemple : étudions la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Cette suite semble relever à la fois du cas arithmétique (on ajoute 1 et du cas géométrique (on multiplie par 2). La difficulté ici est que l'on ne sait pas ce qu'on doit trouver. Calculons donc quelques valeurs pour nous fixer les idées[1] :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 \end{aligned}$$

[1] Ceci est un principe de recherche fondamental dans les raisonnements par récurrence mais aussi dans tous les exercices ouverts : lorsqu'on ne sait pas ce qu'on doit démontrer, on étudie quelques exemples, ici les premières valeurs de la suite, pour se faire une idée. Nous utiliserons très souvent cette *heuristique*, en particulier lors de l'épreuve pratique.

À ce stade, les informaticiens et les connaisseurs des puissances de 2 auront reconnu la loi qui semble émerger : u_n semble être égal à une puissance de 2 moins un. Plus précisément, il semblerait que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n = 2^n - 1$$

C'est cette conjecture que nous allons tenter de démontrer (sans être certain qu'elle soit vraie, il se peut que le calcul de u_6 ou u_7 la contredise, mais on ne peut de toute façon pas calculer éternellement des valeurs de u_n).

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = 2^n - 1$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = 2^0 - 1 = 0$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier* n, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} 2u_n + 1 \underset{\mathscr{P}_n}{=} 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Exercices

1) En forme de ROC (bac sept. 2007) : on suppose connus les résultats suivants : les dérivées des fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont respectivement $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ (en abrégé, $(1)' = 0$ et $(x)' = 1$).

   Il s'agit de démontrer que la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

2) On pose pour tout $n \geqslant 1$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ (somme des n premiers nombres impairs). Montrer que $u_n = n^2$.

3) Montrer que : pour tout $x \in]-1; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (inégalité de Bernoulli, voir aussi l'exercice 40 p.16).

4) Exercices 33, 34, 42, 43 p.16, 50, 54, 55, 61 p.17.

5) Pour un exemple de récurrence *à deux étapes* : 62 p.18.

6) En DM : un exercice d'entraînement à l'épreuve expérimentale.

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

   (a) À l'aide d'un tableur, calculer et représenter graphiquement les 30 premières valeurs de la suite. Le nuage de points obtenu a-t-il une particularité ? Si oui, émettre une conjecture.

   (b) Chercher, toujours par expérimentation à l'aide du tableur, un polynôme P du second degré tel que $u_n = P(n)$ pour tout n compris entre 0 et 30.

(c) Démontrer que $u_n = P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La feuille de calcul, avec le graphique, devra figurer dans la copie, et les formules utilisées pour automatiser les calculs devront être indiquées. La démonstration de $u_n = P(n)$ se fera sur la copie.

7) Pour s'amuser (possiblement en DM aussi) : exercices 67 et 68 p.18.