Isométries

1) **Isométries du triangle équilatéral, du losange, du carré**

   ABC est un triangle équilatéral dans le plan orienté. Trouvez toutes les isométries qui laissent ce triangle *globalement invariant*.

   Même question pour un losange non carré, puis pour un carré.

2) **Isométries transformant une droite en une autre**

   D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en I.

   (a) Déterminez les isométries transformant D_1 en D_2 et laissant le point I invariant.

   (b) Soit f une isométrie transformant D_1 en D_2. On désigne par I' l'image de I par f.

      i. Montrez que l'isométrie $t_{\overrightarrow{I'I}} \circ f$ transforme D_1 en D_2 et laisse I invariant.

      ii. Déduisez-en qu'une isométrie f transforme D_1 en D_2 si et seulement si $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D_2 et où g est une isométrie laissant I invariant et tranformant D_1 en D_2.

3) **Isométries laissant invariant un couple de droites**

   Trouvez toutes les isométries conservant un couple de droites $D \cup D'$, dans les cas suivants :

   - D et D' parallèles et distinctes,
   - D et D' perpendiculaires,
   - D et D' sécantes et non perpendiculaires.

4) ABC est un triangle équilatéral de sens direct ; D est le symétrique de B par rapport à (AC).

   (a) Trouvez toutes les isométries qui conservent le triangle ABC.

   (b) Trouvez un déplacement qui transforme le triangle ABC en le triangle ACD.

   (c) Trouvez tous les déplacements qui transforment le triangle ABC en le triangle ACD.

   (d) Écrivez sous forme de composée de transformations connues les antidéplacements qui transforment ABC en ACD.

   (e) Décomposez chacun de ces antidéplacements sous la forme $t \circ s$ où s est une réflexion et t une translation dont le vecteur appartient à l'axe de s.

   (f) Dans chacun des cas précédents, démontrez que $t \circ s = s \circ t$.

5) **Réflexions glissées**

   Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ et s_D une réflexion d'axe D. On se propose d'étudier la composée $t_{\vec{u}} \circ s_D$ dans toutes les positions relatives de $\vec{u}$ et D.

   (a) Montrez que $t_{\vec{u}} \circ s_D$ est un antidéplacement. En déduire que ce n'est ni une translation, ni une rotation.

   (b) On suppose que $\vec{u}$ est un vecteur normal à D. En décomposant $t_{\vec{u}}$ en un produit de réflexions bien choisies, montrez que $t_{\vec{u}} \circ s_D$ est une réflexion dont vous déterminerez l'axe.

   (c) On suppose maintenant que $\vec{u}$ est non nul et que c'est un vecteur directeur de D. En raisonnant par l'absurde, montrer que $t_{\vec{u}} \circ s_D$ ne peut pas être une réflexion (c'est pourquoi on lui donne le nom de *réflexion glissée*)

   (d) On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$, et que $\vec{u}$ n'est ni parallèle, ni orthogonal à la direction de D. En décomposant $\vec{u}$ en la somme de deux vecteurs, montrez que $t_{\vec{u}} \circ s_D$ est encore une réflexion glissée.

      Donnez la *forme réduite* de $t_{\vec{u}} \circ s_D$, i.e. trouvez une droite D' et un vecteur $\vec{v}$ parallèle à la direction de D' tel que $t_{\vec{v}} \circ s_{D'} = t_{\vec{u}} \circ s_D$.

   (e) Montrez que le produit d'une rotation par une réflexion est soit une réflexion, soit une réflexion glissée.

   (f) Déduire de ce qui précède qu'il n'y a que quatre types d'isométries : les translations, les rotations, les réflexions et les réflexions glissées.

6) **Problème des médiatrices**

D_1, D_2 et D_3 sont trois droites distinctes concourant en O.

(a) σ_1, σ_2 et σ_3 sont les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3. Que peut-on dire de la composée $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$?

(b) Trouver l'ensemble des points B_1 tels que D_1, D_2 et D_3 sont les médiatrices des cotés $[B_2B_3]$, $[B_3B_1]$ et $[B_1B_2]$ d(un triangle $B_1B_2B_3$.

7) **Composée de trois symétries centrales**

(a) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et I, J, K et L les milieux de ses cotés (pris dans le bon ordre). Que peut-on dire du quadrilatère $IJKL$:

i. par des considérations de configuration ?

ii. par des arguments de transformation, en considérant $s_I \circ s_J$ et $s_L \circ s_K$?

(b) Un quadrilatère étant donné, peut-on trouver $ABCD$ dont $IJKL$ soit le quadrilatère des milieux ?

(c) Même question avec cinq points : un pentagone $IJKLM$ étant donné, peut-on trouver un pentagone $ABCDE$ dont $IJKLM$ soit le pentagone des milieux ?

On pourra pour répondre à cette question s'intéresser à la composée $s_I \circ s_J \circ s_K$.

8) **Un problème de construction**

Construire un triangle équilatéral ABC dont le sommet A est fixé et dont les sommets B et C sont respectivement sur les droites D et D' fixées.

9) **Quelques propriétés de l'orthocentre**

ABC est un triangle. A' est le milieu de $[BC]$, O le centre du cercle circonscrit à ABC, et G son centre de gravité.

(a) On considère le point H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

i. Montrez que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

ii. Déduisez-en que H est l'orthocentre de ABC.

iii. Montrez la relation : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on à propos de O, H et G ?

(b) A'' est le symétrique de H par rapport à A'.

i. Montrez que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OA''}$.

ii. Déduisez-en que A'' appartient au le cercle circonscrit à ABC.

(c) $s_{(BC)}$ désigne la réflexion d'axe (BC), et $t_{\overrightarrow{HA}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$.

i. Montrez que $t_{\overrightarrow{HA}} \circ s_{(BC)}(H_1) = A$.

ii. Montrez que $t_{\overrightarrow{HA}} \circ s_{(BC)}$ est une réflexion. Quel est son axe ?

iii. Déduisez-en que H_1 appartient au cercle circonscrit à ABC.

iv. Montrez que les cercles circonscrit respectivement à ABC et HBC sont isométriques.

10) **Une table bien pratique**

$ABCD$ est un rectangle du plan orienté, tel que $AD = BC = a$, $AB = CD = 2a$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. O est le point d'intersection des diagonales.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

(a) Dessinez le rectangle $ABCD$ et son image $A'B'C'D'$ par $f = t \circ r$ (avec $a = 4$cm).

(b) Expliquez pourquoi f est un rotation. Déterminez son angle. Donnez une construction de son centre Ω.

Ce point Ω est utilisé par les ébénistes lorsqu'ils construisent une table rectangulaire que l'on peut faire pivoter autour de Ω puis déplier pour en doubler la surface, la table restant centrée sur son rectangle d'assiette.