Bac blanc

Session 2011

Épreuve : Mathématiques

Série : TS, enseignement de spécialité

coefficient : 9

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Le sujet comporte 5 pages.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 : Analyse (6 points)

Partie A

1) On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

- la suite (u_n) est croissante,
- la suite (v_n) est décroissante,
- la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ converge vers 0.

(a) Démontrer que la suite (w_n) est décroissante. Que peut-on en déduire pour les termes de cette suite ?

(b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

(c) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et que la suite (v_n) est décroissante à partir du rang 2.

(b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

(c) Calculer une valeur approchée de u_8 à 10^{-5} près, et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-4} de la limite commune de (u_n) et (v_n).

Partie B

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On définit sur $[0,1]$ les fonctions g et h par :

$$g(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = g(x) + e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

1) (a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

(b) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $[0,1]$.

(c) Dresser les tableaux de variations de g et h.

(d) En déduire que : (1) : $g(1) < 1 < h(1)$.

2) Déduire de (1) que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n < e < v_n$.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exercice 2 : Arithmétique (5 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) (a) Calculer le PGCD de x_8 et x_9, puis celui de x_{2010} et x_{2011}.
   Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, et pour x_{2010} et x_{2011} d'autre part ?

   (b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

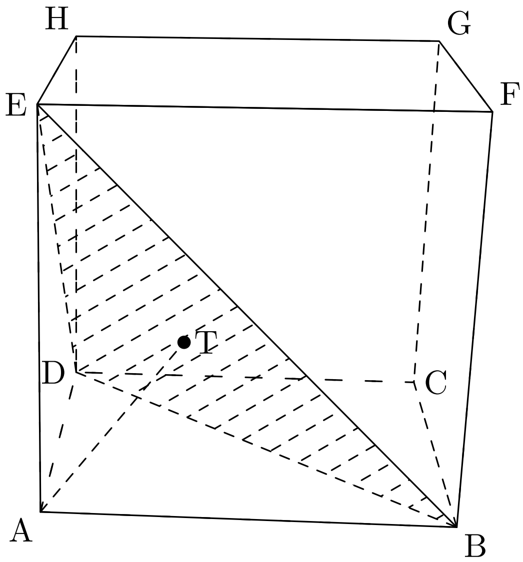
   (b) Exprimer y_n en fonction de n.

   (c) EN utilisant les congruences modulo 5, étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

   (d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.
   En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3 : géométrie dans l'espace (5 points)

Soit $ABCDEFGH$ un cube de coté 1. On note T le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).



1) Quelle est la nature du triangle BDE ? Justifier votre réponse.

2) (a) Démontrer que $\overrightarrow{BT}.\overrightarrow{ED} = 0$. Que peut-on en déduire à propos des droites (BT) et (ED) ?

   (b) Démontrer que les droites (ET) et (BD) sont orthogonales.

   (c) Que peut-on en conclure pour le point T ? Pourquoi ?

3) (a) Calculer l'aire du triangle BDE.

   (b) Justifier que le volume du tétraèdre $ABDE$ est égal à $\frac{1}{6}$.

   (c) En exprimant ce volume d'une autre manière, déterminer la distance de A au plan (BDE).

4) Dans cette question, on calcule la distance du point A au plan (BDE) en utilisant le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE).

   (b) En déduire la distance de A au plan (BDE).

Exercice 4 : Probabilités (4 points)

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, …, S_n tels que :

- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes,
- chacun des suivants, S_2, …, S_n contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1,
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille de S_2,
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille de S_3,
- etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p\left(E_n\right)$ sa probabilité.

1) *Mise en évidence d'une relation de récurrence*

   (a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p\left(E_1\right)$, $p_{E_1}\left(E_2\right)$ (probabilité de E_2 *sachant* E_1) et $p_{\overline{E_1}}\left(E_2\right)$.
   En déduire la valeur de $p\left(E_2\right)$.

   (b) À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p\left(E_{n+1}\right)$ en fonction de $p\left(E_n\right)$.

2) *Étude d'une suite*

   On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{2}{5}$, et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5}$.

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{2}{5}$.

   (b) On pose $\mu_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $\left(\mu_n\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, et préciser sa raison.

   (c) Exprimer μ_n en fonction de n. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.5^n}$.

3) *Évolution des probabilités* $p\left(E_n\right)$

   À l'aide de l'étude de la partie précédente, préciser :

   (a) le sens de variation de cette suite.

   (b) la limite de la suite $\left(p\left(E_n\right)\right)_{n\geqslant 1}$,