Corrigé du bac blanc 2010

Exercice 1 : Analyse

Partie A

1) (a) $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$. Or par hypothèse (v_n) est décroissante, donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, et (u_n) est croissante, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Ainsi, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$, i.e. (w_n) est décroissante[1]. Or une suite décroissante de limite nulle est nécessairement à termes positifs ou nulles. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, donc $v_n \geqslant u_n$.

(b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. D'où :

- (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle est donc convergente,
- (v_n) est décroissante et minorée par u_0, elle est donc aussi convergente.

(c) Soit ℓ la limite de la suite (u_n), et ℓ' la limite de la suite (v_n). De $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, on déduit : $\ell - \ell' = 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) ont bien même limite.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

(a) Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.
Si maintenant $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0 \end{aligned}$$

donc (v_n) est décroissante.

(b) $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Elles convergent donc toutes deux vers une même limite.

(c) Si ℓ est la limite commune aux deux suites (u_n) et (v_n), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
On obtient ainsi un encadrement de ℓ, de plus en plus précis au fur et à mesure que n augmente, et cette précision augmente ici très rapidement puisque $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ tend très vite vers 0.
On trouve à la calculette : $u_8 \approx 2{,}71827$ (à 10^{-5} près par défaut) et $v_8 \approx 2{,}71831$ (à 10^{-5} près par excès).
Ainsi :

$$2{,}71827 \leqslant u_8 \leqslant \ell \leqslant v_8 \leqslant 2{,}71831$$

2,7183 est donc une valeur approchée à 10^{-4} près de ℓ.

Partie B

1) (a) g est dérivable sur $[0;1]$, et :

$$g'(x) = -e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) + e^{-x}\left(0 + 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi, g' est négative sur $[0;1]$, donc g y est décroissante.

(b) De la même façon, h est dérivable sur $[0;1]$, et

$$h'(x) = g'(x) - e^{-x}\frac{x^n}{n!} + e^{-x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{n!}(n - 2x)$$

et comme $x \in [0;1]$ et $n \geqslant 2$, $n - 2x \geqslant 0$ et h' est positive sur $[0;1]$, donc h y est croissante.

[1] Plus simplement, on peut dire que (w_n) est la somme de deux suites croissantes, (v_n) et $(-u_n)$ (c'est d'ailleurs pour cela que le calcul précédent fonctionne).

(c) Voici les tableaux de variations de g et h sur $[0;1]$:

x	0	1
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1 $\searrow$	

x	0	1
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	1 $\nearrow$	

(d) On déduit de ces tableau de variations que :

$$g(1) < g(0) = 1 = h(0) < h(1)$$

2) La relation précédente s'écrit :

$$g(1) = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < 1 < e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}\right) = h(1)$$

d'où en multipliant par e^1 :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} = v_n$$

3) (u_n) est croissante et majorée par e, donc $\ell \leqslant e$. D'autre part, (v_n) est décroissante et minorée par e, donc $\ell \geqslant e$. Ainsi, la limite commune aux deux suites (u_n) et (v_n) est e, ce qu'on peut écrire :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Exercice 2 (obligatoire) : complexes

1) $|Z| = 1$ équivaut à $|z - (1-i)| = |z-1|$, soit encore $MA = MB$. L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $|Z| = 1$ est donc bien la médiatrice du segment $[AB]$.

2) (a) On a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy - 1 + i}{x + iy - 1} = \frac{(x-1) + i(y+1)}{(x-1) + iy} \\ &= \frac{((x-1) + i(y+1))((x-1) - iy)}{((x-1) + iy)((x-1) - iy)} \\ &= \frac{(x-1)^2 + y^2 + y + i((y+1)(x-1) - (x-1)y)}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + i(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(Z) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}$$

(b) Z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(Z) = 0$, soit si $x - 1 = 0$ et $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$.
L'ensemble des z tels que Z est réel est donc la droite verticale d'équation $x = 1$, privée du point A.

(c) Z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(Z) = 0$, soit si $(x-1)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$ et $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$.
La première équation est celle du cercle de centre Ω d'affixe $1 - \frac{i}{2}$ (milieu de $[AB]$) et de rayon $\frac{1}{2}$. La deuxième équation exclue le point A.

3) (a) On vérifie facilement : $(Z-1)(z-1) = \left(\dfrac{z-1+i}{z-1} - 1\right)(z-1) = (z-1+i) - (z-1) = i$.

(b) Prenant le module de la relation précédente, on obtient :

$$|Z-1|\,|z-1| = |i| \iff AM'.AM = 1 \iff AM' = \frac{1}{AM}$$

Prenant maintenant l'argument des deux membres, on obtient :

$$\begin{aligned} &\arg(Z-1) + \arg(z-1) = \arg(i)\ (\bmod 2\pi) \\ \iff &\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\bmod 2\pi) \\ \iff &\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)\ (\bmod 2\pi) \end{aligned}$$

(c) Si $AM = 2$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{6}$ (mod 2π), alors d'après ce qui précède,

$$AM' = \frac{1}{AM} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{3}\ (\bmod 2\pi)$$

M' se trouve donc sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$, et sur la demi-droite symétrique de la demi-droite $[AM)$ par rapport à la droite Δ, parallèle à la première diagonale passant par A.

Exercice 2 (spécialité) : Arithmétique

1) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : $x_n = 2^{n+1} + 1$.

- $x_0 = 3 = 2^1 + 1$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie ;
- supposons $\mathscr{P}_n$ vraie ; alors $x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 = 2^{n+2} + 1$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

$\mathscr{P}_n$ est donc fondée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) (a) Calculons directement le pgcd de x_n et x_{n+1} à l'aide de la relation trouvée ci-dessus :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(x_n, x_{n+1}) &= \text{pgcd}\left(2^{n+2}+1, 2^{n+1}+1\right) = \text{pgcd}\left(\left(2^{n+2}+1\right) - \left(2^{n+1}+1\right), 2^{n+1}+1\right) \\ &= \text{pgcd}\left(2^{n+1}, 2^{n+1}+1\right) = \text{pgcd}\left(2^{n+1}, 2^{n+1}+1-2^{n+1}\right) \\ &= \text{pgcd}\left(2^{n+1}, 1\right) = 1 \end{aligned}$$

Autre méthode : en remarquant que la relation de récurrence $x_{n+1} = 2x_n - 1$ peut se réécrire $2x_n - x_{n+1} = 1$, on découvre une relation de Bézout qui démontre que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux.
Ceci répond en même temps aux deux questions : le PGCD de x_8 et x_9, celui de x_{2010} et x_{2011} et plus généralement celui de x_n et x_{n+1} est toujours égal à 1.

(b) On peut relire ce qui précède sous la forme : x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n.

3) (a) Notons $\mathscr{Q}_n$ l'assertion : $2x_n - y_n = 5$.

- $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$, donc $\mathscr{Q}_0$ est vraie ;
- supposons $\mathscr{Q}_n$ vraie ; alors

$$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3) = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2 \times 5 - 5 = 5$$

(b) On a donc : $y_n = 2x_n - 5$, d'où d'après la première question : $y_n = 2\left(2^{n+1}+1\right) - 5 = 2^{n+2} - 3$.
En observant les premiers restes modulo 5 des puissances de 2 :

p	0	1	2	3	4
$2^p\ (\bmod 5)$	1	2	4	3	1

Ainsi, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5 est égale au reste de la division euclidienne de 2^r par 5, r étant le reste de la division euclidienne de p par 4 :

$$2^p = 2^{4q+r} = \left(2^4\right)^q.2^r \equiv 2^r\ (\bmod 5)$$

(c) Le PGCD d_n x_n et y_n divise x_n et y_n, donc aussi $2x_n - y_n = 5$. Ainsi, $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.
D'après le tableau précédent, les restes possibles modulo 5 de x_n sont

p	0	1	2	3	4
$2^{p+1}+1\ (\bmod 5)$	3	0	4	2	3

Ainsi x_n n'est divisible par 5 que lorsque n est congru à 1 modulo 4, auquel cas $y_n = 2x_n - 5$ est aussi divisible par 5. Dans ce cas, le PGCD de x_n et y_n est 5.

Dans tous les autres cas, le PGCD de x_n et y_n est égal à 1, i.e. x_n et y_n sont premiers entre eux.

Pour résumer : x_n et y_n sont premiers entre eux si et seulement si n n'est pas congru à 1 modulo 4.

Exercice 3 : (points)

1) Les cotés du triangle BDE sont des diagonales des faces du cube, ils sont donc tous de longueur $\sqrt{2}$. Le triangle BDE est donc équilatéral.

2) (a) $\overrightarrow{BT}.\overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT}\right).\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AT}.\overrightarrow{ED}$.

   Or $\overrightarrow{BA}$ est orthogonal au plan (ADE), donc à tous ses vecteurs. Ainsi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{ED} = 0$.

   D'autre part T est le projeté orthogonal de A sur (BDE), donc $\overrightarrow{AT}$ est orthogonal à tous les vecteurs de (BDE), et en particulier $\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{ED} = 0$.

   Finalement, $\overrightarrow{BT}.\overrightarrow{ED} = 0$. On en déduit que les droites (BT) et (ED) sont perpendiculaires.

   (b) En écrivant de même $\overrightarrow{ET}$ sous la forme $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AT}$, on démontre que $\overrightarrow{ET}.\overrightarrow{BD} = 0$, et donc que les droites (ET) et (BD) sont orthogonales.

   (c) (BT) est donc la hauteur issue de B du triangle BDE, de même que (ET) en est la hauteur issue de E.
   T, point de concours de deux hauteurs de ce triangle, en est donc l'orthocentre (c'est aussi son centre de gravité, son orthocentre et le centre de son cercle circonscrit car BDE est équilatéral).

3) (a) L'aire d'un triangle équilatéral de coté a est $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Comme BDE a pour coté $\sqrt{2}$, son aire est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) En considérant le tétraèdre $ABDE$ comme une pyramide de base ABD et de hauteur AE, son volume est égal à
$$\tfrac{1}{3} \times \mathscr{A}\,(ABD) \times AE = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} \times 1 = \tfrac{1}{6}$$

   (c) On peut aussi considérer le tétraèdre comme ayant BDE pour base et AT pour hauteur (rappelons que (AT) est orthogonale à (BDE)), donc son volume est
$$\tfrac{1}{3} \times \mathscr{A}\,(BDE) \times AT = \tfrac{\sqrt{3}}{6} AT$$
   On en déduit que : $AT = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4) (a) Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées de B, D et E sont respectivement $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

   On peut trouver une équation du plan (BDE) en en cherchant un vecteur normal (qui doit être orthogonal à deux vecteurs de ce plan, par exemple $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$), mais il est plus simple ici de chercher directement une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

   De $B \in (BDE)$, on tire $a + d = 0$, de $D \in (BDE)$, $b + d = 0$ et de $E \in (BDE)$, $c + d = 0$. Ainsi le choix d'une des constantes conditionne celui des trois autres, et on voit qu'on peut prendre comme équation : $x + y + z - 1 = 0$.

   (b) La distance de A au plan (BDE) est alors : $d\,(A, (BDE)) = \dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4 : Probabilités

1) *Mise en évidence d'une relation de récurrence*

   (a) Il y a clairement équiprobabilité lors des tirages (on tire “au hasard”), donc la probabilité de tirer une boule verte à chaque tirage est simplement égale au nombre de boules vertes sur le nombre total de boules dans le sac. Ainsi, $p\,(E_1) = \dfrac{2}{5}$.

   D'autre part,

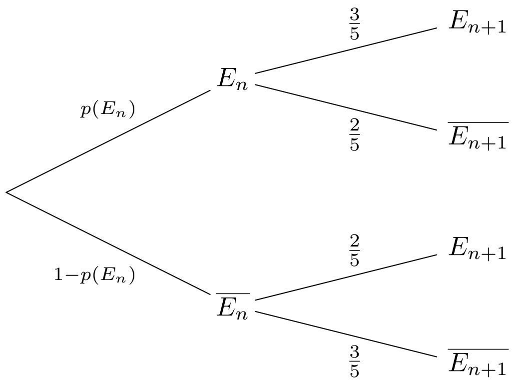
   - si E_1 s'est réalisé, il y a 3 boules vertes et 2 boules jaunes dans le sac S_2, donc $p_{E_1}\,(E_2) = \dfrac{3}{5}$,

- alors que si E_1 ne s'est pas réalisé, il y a 2 boules vertes et 3 boules jaunes dans le sac S_2, donc $p_{\overline{E_1}}(E_2) = \dfrac{2}{5}$.

D'après la *loi des probabilités totales*, on en déduit :

$$p(E_2) = p(E_1).p_{E_1}(E_2) + p\left(\overline{E_1}\right).p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

(b) Examinons ce qui se passe aux n-ème et $(n+1)$-ème tirages :



On visualise ainsi la relation :

$$p(E_{n+1}) = p(E_n).p_{E_n}(E_{n+1}) + p\left(\overline{E_n}\right).p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{3}{5}p(E_n) + \frac{2}{5}(1 - p(E_n)) = \frac{1}{5}p(E_n) + \frac{2}{5}$$

2) *Étude d'une suite*

On reconnaît dans cette suite la relation de récurrence vérifiée par la suite $(p(E_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : "$u_n \geqslant \frac{2}{5}$".
$u_1 = \frac{2}{5}$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \geqslant \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \geqslant \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.
$\mathscr{P}_n$ est fondée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

(b) La suite $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\mu_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\mu_n + \frac{1}{2}$$

soit : $\mu_{n+1} = \dfrac{1}{5}\mu_n$. $(\mu_n)_n$ est donc une suite géométrique, de raison $r = \frac{1}{5}$ et de premier terme $\mu_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$.

(c) On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $\mu_n = \mu_1.r^{n-1} = -\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2.5^n}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \mu_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.5^n}$.

3) *Évolution des probabilités $p(E_n)$*

La suite $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)_n$ est décroissante, de limite nulle, donc $(u_n)_n$ est *croissante*, de limite $\dfrac{1}{2}$.