Corrigé de l'évaluation : dérivation

Exercice 1 (6 points)

1) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, ce sont donc 0 et 4.

2) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2, c'est-à-dire le point S. Si on nous dit que cette tangente est horizontale, c'est que son coefficient directeur est nul. Donc $f'(2) = 0$.

3) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A a une équation de la forme $y = ax + b$, avec $a = f'(3) = -2$. Elle passe par le point A, donc les coordonnées de A doivent vérifier l'équation de la droite :
$$3 = -2 \times 3 + b \iff b = 3 + 2 \times 3 = 9$$
T a donc pour équation $y = -2x + 9$.

4) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en O, donc le coefficient directeur de la droite (OB). Celui-ci vaut :
$$\frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{4-0}{1-0} = 4$$
Ainsi, $f'(0) = 4$.

5) De $f(x) = -x^2 + 4x$, on tire déjà :
$$f(x) = 0 \iff -x^2 + 4x = 0 \iff x(-x+4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4$$
ce qu'on avait trouvé dans la première question.
$f'(x) = -2x + 4$, donc
$$f'(2) = -2 \times 2 + 4 = 0, \quad f'(3) = -2 \times 3 + 4 = -2, \quad f'(0) = -2 \times 0 + 4 = 4$$
ce qui confirme les résultats trouvés dans les questions 2), 3) et 4).

Exercice 2 (5 points)

Notons f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$. Dire que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$ revient à dire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = e^x - 1 - x$. Le signe de $f'(x)$ n'est pas vraiment évident, donc on pense à redériver : $f''(x) = e^x - 1$.
Or le fait que $1 = e^0$ et la stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$ nous permettent de trouver le signe de $f''(x)$, et donc les variations de f' :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 $+$	
$f'(x)$	0 $\nearrow$	

Ce tableau de variations nous apprend que 0 est le minimum de f' sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ y reste toujours positif ou nul. On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	

Ainsi, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 (9 points)

Partie I

1) $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. $P'(x)$ est un polynôme du second degré, donc il est du signe de son coefficient dominant (soit positif), sauf entre ses racines qui sont 0 et 1.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) Le tableau de variations ci-dessus nous apprend que P reste strictement négative sur $]-\infty; 1[$, et s'annule une fois et une seule (en raison de sa stricte monotonie) sur $]1; +\infty[$.
Si l'on appelle α cette unique solution, de $P(1{,}6) < 0 < P(1{,}7)$, on déduit que $\alpha \in]1{,}6; 1{,}7[$.

3) Le signe de $P(x)$ se déduit simplement de l'ajout du renseignement $P(\alpha) = 0$ dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 5cm.

1) f est une fonction rationnelle, elle est définie et dérivable sur I.

$$f'(x) = \frac{-1.\left(1+x^3\right) - (1-x).3x^2}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{P(x)}{\left(1+x^3\right)^2}$$

Le dénominateur restant strictement positif, $f'(x)$ est bien du signe de $P(x)$. f est donc décroissante sur $]-1, \alpha[$, et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

2) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} 1 - x = 2$, et $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} 1 + x^3 = 0^+$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
Par application du théorème sur la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$, on trouve d'autre part :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses, quoi !) est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

3) $f'(1) = \dfrac{-1}{4}$, et $f(1) = 0$ (la courbe traverse donc l'axe des abscisses au point d'abscisse 1), donc l'équation de la tangente D à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

4) La courbe $\mathscr{C}$ est donnée à la page suivante.

$\mathscr{C}$
D
α
A
0
1
2
3
4
−1