Cours de mathématiques de terminale S

Nicolas FRANCOIS
nicolas.francois@free.fr

3 février 2011

Table des matières

CHAPITRE I

Le plan complexe et les nombres complexes

Sommaire

Au début du XVIème siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, *a priori*, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$. Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul, que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement[1] :

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Une fois de plus, des calculs illicites menaient à un résultat juste. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

Introduction

L'équation $x + 3 = 7$ a une solution dans $\mathbb{N}$. Par contre, pour trouver une solution à l'équation $x + 7 = 3$, il faut passer dans le domaine $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Continuant sur notre chemin, on invente facilement l'équation $3x + 1 = 0$, pour laquelle $\mathbb{Z}$ est insuffisant, il faut passer dans $\mathbb{Q}$. Enfin, les grecs savaient déjà que cet ensemble $\mathbb{Q}$ ne suffisait pas, puisque l'équation $x^2 = 2$ n'y a pas de solution. On est donc conduit à créer l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Lorsqu'une équation n'a pas de solution dans un ensemble donné, on est donc naturellement conduit à créer un ensemble plus gros, qui contient les ensembles déjà rencontrés, et prolonge les opérations sur ces ensembles. Le plus gros ensemble que nous avons rencontré jusqu'à présent est $\mathbb{R}$.

Est-ce fini ? Eh bien non, malheureusement, puisque l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. On est donc conduit à inventer un ensemble plus gros que $\mathbb{R}$, le contenant, et permettant de résoudre cette nouvelle équation. C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce cours.

I L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

A Définitions

Nous avons vu en TD une introduction des nombres complexes à partir du plan repéré par un repère[2] $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct : à tout point M du plan, on associe le couple $(a; b)$ de ses coordonnées. Ainsi,

$$M\,(a; b) \iff \overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

En notant 1 le couple $(1; 0)$ et i le couple $(0; 1)$, on constate qu'on peut écrire plus simplement $(a; b) = a + ib$.

L'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{C}$, et appelé *ensemble des nombres complexes*.

On assimile tout réel x au couple $(x; 0)$, noté $x + 0i$, ce qui permet d'inclure $\mathbb{R}$ en tant que sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

De même, tout couple de la forme $(0; y)$ est noté $0 + iy$, ou plus simplement iy, et est appelé *nombre imaginaire pur*.

Si a et b sont deux réels, $z = a + ib$ est appelée l'écriture algébrique du nombre complexe z. a est appelé *partie réelle* de z, et noté $\mathrm{Re}\,(z)$. b est appelé *partie imaginaire*[3] de z, et noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

[1] et c'est la dernière fois que vous rencontrerez cette horrible notation $\sqrt{-1}$. En effet, si elle rappelle la propriété fondamentale du nombre i, elle a trop d'inconvénients et engendre de nombreuses confusions, surtout dans l'esprit des pauvres élèves sans défense. Par exemple, $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ est-il égal à -1, ou à $\sqrt{(-1)^2} = 1$?

[2] Les vecteurs de base sont notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ plutôt que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, pour éviter la confusion entre $\vec{\imath}$ et i.

[3] Ainsi, $\mathrm{Im}\,(z)$ est un **réel** !

Ainsi, z est réel si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, et imaginaire pur si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$.

Théorème 1

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même écriture algébrique.

En particulier, 0 a pour unique écriture $0 + 0i$.

> ***Preuve*** *En effet, dire $a + ib = a' + ib'$ revient à dire que $(a; b) = (a'; b')$, soit $a = a'$ et $b = b'$.*
>
> *Une autre démonstration, basée sur les propriétés arithmétiques que nous allons voir dans la prochaine section, consiste à étudier l'équation $a + ib = 0$, d'inconnues a et b. Si $b \neq 0$, elle implique $i = -\frac{b}{a}$, donc i réel, ce qui est impossible puisque $i^2 = -1$. Donc $b = 0$, et alors nécessairement $a = 0$.*

B Addition et multiplication des complexes

On a définit deux opérations sur cet ensemble $\mathbb{C}$:

$$(a; b) + (a'; b') = (a + a'; b + b') \quad \text{et} \quad (a; b) \times (a'; b') = (aa' - bb'; a'b + ab')$$

On constate que ceci revient à prolonger la multiplication sur $\mathbb{R}$ à l'ensemble des couples. Cette opération a toutes les bonnes propriétés qu'avait déjà la multiplication sur $\mathbb{R}$: elle est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition, elle possède un élément neutre et tout complexe autre que 0 est inversible. Ceci définit sur $\mathbb{C}$ une *structure de corps.*

Le complexe i a une propriété tout à fait remarquable : son carré est égal à -1 ! En conséquence, lorsqu'on voudra additionner ou multiplier deux complexes, on utilisera les formules suivantes :

$$\boxed{(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i\,(b + b')} \text{ et } \boxed{(a + ib)\,(a' + ib') = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)}$$

Notons que ceci peut se traduire par les formules $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z')$ (mais on n'a pas de formules aussi simples pour le produit !).

Propriété 1

$z^2 + z'^2 = (z + iz')\,(z - iz')$

> ***Preuve*** *En effet : $z^2 + z'^2 = z^2 - iz'^2 = (z + iz')\,(z - iz')$.*

En particulier, si a et b sont réels, $a^2 + b^2 = (a + ib)\,(a - ib)$.

Exercices :

- Exercices 3 à 5 et 11 p.333.

- Exercice 45 p.337.

C Le plan complexe

À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M\,(x; y)$ du plan repéré par un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Cette opération est en quelque sorte l'opération inverse de celle qui nous a permis de définir les nombres complexes. D'ailleurs, on pourra aussi associer à tout complexe $z = x + iy$ le vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$. Les deux notions sont liées par la relation vectorielle $\vec{\omega} = \overrightarrow{OM}$. On n'hésitera d'ailleurs pas dans les exercices à confondre ces deux points de vue.

Le point $M\,(x; y)$ (ou le vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$) s'appelle *l'image* du nombre complexe $z = x + iy$.

Le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle *l'affixe* du point $M\,(x; y)$ (ou du vecteur $\vec{\omega}\,(x; y)$).

Exercice : Exercices 1 et 2 p.333.

II Conjugaison, module, division

A Définitions, premières conséquences

Définition 1 : *Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$.*

Par exemple $\overline{2+3i} = 2 - 3i$, $\overline{5} = 5$ et $\overline{-3i} = 3i$.

Géométriquement, les images des nombres complexes conjugués z et $\overline{z}$ sont *symétriques* par rapport à l'axe des abscisses.

Quelques conséquences de cette définition :

Propriétés 1

- $z = z'$ équivaut à $\overline{z} = \overline{z'}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)$, et $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)$.
- z réel équivaut à $z = \overline{z}$, z imaginaire pur équivaut à $z = -\overline{z}$.

Preuve *Laissées en exercices.*

Un propriété intéressante de la conjugaison est la suivante : si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$. Ce nombre est positif ou nul, et vaut 0 si et seulement si $z = 0$. On peut d'ailleurs l'interpréter comme le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\,(a;b)$ image de z.

Définition 2 : *Si $z = a + ib$, le nombre $\sqrt{a^2+b^2}$ est noté $|z|$, et appelé* module *du nombre complexe z.*

Ainsi, $|z| = 0 \iff z = 0$, et $z\overline{z} = |z|^2$.

B Division

Constatons que, si $z = a + ib \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Ceci montre en particulier que tout nombre complexe non nul est inversible, et donne un procédé (tout à fait général) pour trouver la forme algébrique de son inverse. On utilisera cette méthode (et non le résultat de ce calcul, qu'il est inutile de retenir), pour calculer des quotients de nombres complexes. Par exemple :

$$\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

On retiendra quand même les deux formules plus théoriques suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}}$$

Exercice : Exercices 6 à 11 p.333.

C Opérations et conjugaison

Trois propriétés essentielles de la conjugaison :

Propriétés 2

- Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

- Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Preuve *Pour le produit par exemple : si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors*

$$\overline{z.z'} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

et

$$\overline{z}.\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

Faire de même pour les autres résultats.

On peut plus généralement étendre ces résultats au cas d'une somme de n termes ou d'un produit de n facteurs. En particulier, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On déduit de ces propriétés une propriété du module :

Propriétés 3
Pour tous complexes z et z', $|zz'| = |z|\,|z'|$.

Preuve *Il suffit de montrer que*[4] $|zz'|^2 = |z|^2\,|z'|^2$. *Or :*

$$|zz'|^2 = (zz')\,\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = (z\overline{z})\left(z'\overline{z'}\right) = |z|^2\,|z'|^2$$

Exercice : Exercices 16, 17 et 19 p.334.

III Équation du second degré à coefficients réels

On a vu en première une méthode de résolution des équations du second degré, de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels (et $a \neq 0$ bien-sûr). La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$, ou plutôt son signe, nous a permis de compter les solutions d'une telle équation, et on a vu que lorsque $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

On va ici s'intéresser à l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec toujours a, b et c réels, mais cette fois l'inconnue z est *complexe*. Bien entendu, on va retrouver des résultats identiques lorsque le discriminant de cette équation sera positif ou nul, mais on va en plus trouver de nouvelles solutions, non réelles, lorsque le discriminant sera strictement négatif[5].

Puisqu'on ne veut pas écrire de racines carrées de nombres négatifs, les formules rencontrées dans le cas où $\Delta \geqslant 0$ ne sont pas généralisables. On va donc revenir à l'outil fondamental de manipulation des trinômes : la *forme canonique*[6]. Écrivons :

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On retrouve[7] notre fameuse quantité $\Delta = b^2 - 4ac$, et la suite de la discussion va s'organiser autour de son signe :

- Si $\Delta > 0$, on utilise l'identité $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$:

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a(z - z_1)(z - z_2)$$

[4] « Ah bin pourquoi ? » « Parce que les deux nombres sont positifs, Jean-Pierre ! » « Ahhh ! Ok Ok Ok ! »

[5] Attention, il ne faudra pas utiliser ces résultats n'importe comment. Par exemple, lorsqu'on étudiera la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, il ne faudra pas dire que cette fonction n'est pas définie en i et $-i$! Les nombres complexes interviennent dans des domaines bien délimités, et nouveaux par rapport à ce que nous connaissions jusqu'à présent. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles l'inconnue d'une équation est notée dans ce cours x si elle est réelle, et z si elle est complexe.

[6] D'ailleurs, si cela ne tenait qu'à moi, on n'utiliserait rien d'autre pour factoriser ces fameux trinômes !

[7] Ahh ! C'est de là que ça vient !

avec $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, réelles tous les deux.

- Si $\Delta = 0$, la factorisation est terminée :

$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_0\right)^2$$

avec $z_0 = - + \dfrac{b}{2a}$. z_0 est appelée "racine double" de l'équation, en raison du carré qui la fait apparaître deux fois dans la factorisation du trinôme.

- Si $\Delta < 0$, on va cette fois utiliser notre nouvelle identité remarquable $u^2 + +v^2 = (u - iv)(u + iv)$:

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)$$

avec $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines complexes *conjuguées* de l'équation. Ceci n'est pas étonnant, nous l'avons déjà vu. Cela vient de $P\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{P\left(\alpha\right)}$ pour tout polynôme P *à coefficients réels.*

Exemple : Soit à trouver les racines de l'équation $2z^2 + 3z + 4 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = -23$, il est négatif donc notre équation admet deux racines complexes non réelles, conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3-i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3+i\sqrt{23}}{4}$$

Notons que si on a besoin de la factorisation, il est plus simple d'employer directement la décomposition canonique[8] :

$$2z^2+3z+4 = 2\left(z^2+\frac{3}{2}z+2\right) = 2\left[\left(z+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right] = 2\left(z+\frac{3-i\sqrt{23}}{4}\right)\left(z+\frac{3+i\sqrt{23}}{4}\right)$$

Exercices :

- Exercices 40 à 42 p.335.
- Exercices 51, 52, 57 à 63 p.337-338.

[8] D'ailleurs, si cela ne tenait qu'à moi, ça fait longtemps que le "Delta" aurait disparu des cours de première ! Il n'apporte rien d'autre qu'une élégante et tout à fait inutile formule, et n'apprend rien aux élèves à propos des expressions comportant des carrés.

CHAPITRE II

Le raisonnement par récurrence

Sommaire

Lors du cours sur les suites en première S, on a énoncé les résultats suivants sur les suites arithmétiques et géométriques, et avons signalé que nous ne disposions pas des outils nécessaires pour les démontrer :

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Relation de récurrence	$\begin{cases} u_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; v_{n+1} = v_n \times r \end{cases}$
Expression explicite	$u_n = u_0 + nr$	$v_n = v_0 r^n$
Somme des termes consécutifs	$u_p + \cdots + u_q = (q-p+1)\,\dfrac{u_p + u_q}{2}$	$v_p + \cdots + v_q = v_p \dfrac{1 - r^{q-p+1}}{1-r}$

Le problème dans ces démonstrations vient des petits points qu'on écrit pour dire “et on répète ces opérations jusqu'à n”. Le principe de raisonnement par récurrence va permettre de justifier tout cela.

I Principe du raisonnement par récurrence

Théorème 2

$\mathscr{P}_n$ est une propriété dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie (on dit que la propriété est *initialisée* ou *fondée*),
- pour tout entier n, $\mathscr{P}_n$ vraie entraîne $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie (on dit que la propriété est *héréditaire*),

alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve *(Hors programme)*

Supposons que $\mathscr{P}_n$ ne soit pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et notons n_0 le plus petit entier n pour lequel $\mathscr{P}_n$ est fausse.

On a donc : $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $0 \leqslant n < n_0$, et $\mathscr{P}_{n_0}$ est fausse.

n_0 n'est pas égal à 0, puisque par hypothèse $\mathscr{P}_0$ est vraie. Donc on peut considérer l'entier $n_0 - 1$.

Comme on vient de le voir, $\mathscr{P}_{n_0-1}$ est vraie, mais alors l'hérédité de la propriété entraîne que $\mathscr{P}_{n_0}$ est encore vraie, ce qui est absurde.

Donc notre hypothèse initiale conduit à une contradiction, il est donc faux de supposer que $\mathscr{P}_n$ n'est pas vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- Les deux hypothèses sont essentielles dans ce principe : une hypothèse de récurrence peut parfaitement être héréditaire... mais fausse pour tout n si elle ne l'est pas au moins pour $n = 0$.
- La démonstration de l'hérédité gène souvent les élèves, car ils ont l'impression de démontrer $\mathscr{P}_n$ pour tout n.

  En fait, il n'en est rien. On ne dit rien dans cette étape sur la véracité de $\mathscr{P}_n$ ni sur celle de $\mathscr{P}_{n+1}$. La seule chose qui nous intéresse est *le lien* qui existe entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. On démontre :

  $$\mathscr{P}_n \boxed{\Longrightarrow} \mathscr{P}_{n+1}$$

  sans *affirmer* ni que $\mathscr{P}_n$ est vraie, ni que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vrai.

  C'est l'initialisation qui transmettra à la fin du raisonnement le caractère vrai de $\mathscr{P}_0$ à tous ses successeurs.

  Insistons bien encore une fois sur la manière de rédiger cette étape : supposons $\mathscr{P}_n$ vrai **pour un certain indice** n, et démontrons **qu'alors** $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vrai.
- Il se peut que la propriété $\mathscr{P}_n$ ne soit pas définie pour les premiers indices. En fait, on peut généraliser le principe ci-dessus en modifiant l'hypothèse d'initialisation : si l'on démontre que la propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, et qu'elle est vraie pour un certain rang n_0, alors on peut conclure qu'elle est vraie pour tout les entiers n supérieurs à n_0 (on dit alors qu'elle est vraie sur “l'intervalle” $[\![n_0;\infty[\![$).

II Des exemples

Exemple : Démontrons avec ce principe la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique en fonction de n.

On a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = a$ est pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = a + nr$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = a + 0 \times r = a$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier n*, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = a+(n+1)\,r$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} u_n + r \underset{\mathscr{P}_n}{=} (a + nr) + r = a + (n+1)\,r$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Un autre exemple : étudions la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Cette suite semble relever à la fois du cas arithmétique (on ajoute 1 et du cas géométrique (on multiplie par 2). La difficulté ici est que l'on ne sait pas ce qu'on doit trouver. Calculons donc quelques valeurs pour nous fixer les idées[1] :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 \end{aligned}$$

À ce stade, les informaticiens et les connaisseurs des puissances de 2 auront reconnu la loi qui semble émerger : u_n semble être égal à une puissance de 2 moins un. Plus précisément, il semblerait que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\;\; u_n = 2^n - 1$$

C'est cette conjecture que nous allons tenter de démontrer (sans être certain qu'elle soit vraie, il se peut que le calcul de u_6 ou u_7 la contredise, mais on ne peut de toute façon pas calculer éternellement des valeurs de u_n).

Énoncé de l'hypothèse Notons $\mathscr{P}_n : u_n = 2^n - 1$.

Initialisation $\mathscr{P}_0$ est vraie : elle affirme que $u_0 = 2^0 - 1 = 0$, ce qui est vrai.

Hérédité Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie *pour un certain entier n*, et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Il s'agit ici de calculer u_{n+1}, et de vérifier qu'il peut s'écrire $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, en utilisant les hypothèses *et* l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$, supposée vraie.

$$u_{n+1} \underset{\text{définition}}{=} 2u_n + 1 \underset{\mathscr{P}_n}{=} 2\,(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien une conséquence de $\mathscr{P}_n$.

Conclusion $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[1] Ceci est un principe de recherche fondamental dans les raisonnements par récurrence mais aussi dans tous les exercices ouverts : lorsqu'on ne sait pas ce qu'on doit démontrer, on étudie quelques exemples, ici les premières valeurs de la suite, pour se faire une idée. Nous utiliserons très souvent cette *heuristique*, en particulier lors de l'épreuve pratique.

III Exercices

a) En forme de ROC (bac sept. 2007) : on suppose connus les résultats suivants : les dérivées des fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont respectivement $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ (en abrégé, $(1)' = 0$ et $(x)' = 1$).

Il s'agit de démontrer que la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

b) On pose pour tout $n \geqslant 1$ $u_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ (somme des n premiers nombres impairs). Montrer que $u_n = n^2$.

c) Montrer que : pour tout $x \in]-1; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (inégalité de Bernoulli, voir aussi l'exercice 40 p.16).

d) Exercices 33, 34, 42, 43 p.16, 50, 54, 55, 61 p.17.

e) Pour un exemple de récurrence *à deux étapes* : 62 p.18.

f) En DM : un exercice d'entraînement à l'épreuve expérimentale.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

f1) À l'aide d'un tableur, calculer et représenter graphiquement les 30 premières valeurs de la suite. Le nuage de points obtenu a-t-il une particularité ? Si oui, émettre une conjecture.

f2) Chercher, toujours par expérimentation à l'aide du tableur, un polynôme P du second degré tel que $u_n = P(n)$ pour tout n compris entre 0 et 30.

f3) Démontrer que $u_n = P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La feuille de calcul, avec le graphique, devra figurer dans la copie, et les formules utilisées pour automatiser les calculs devront être indiquées. La démonstration de $u_n = P(n)$ se fera sur la copie.

g) Pour s'amuser (possiblement en DM aussi) : exercices 67 et 68 p.18.

CHAPITRE III

Dérivation, primitives d'une fonction

Sommaire

I Rappels de première S

On ne va pas ici refaire l'ensemble du cours de première. On va juste fournir quelques compléments et approfondir certains points.

Théorème 3 (Développement limité d'ordre 1)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. La dérivabilité de f en a équivaut à la possibilité d'écrire une relation de la forme :

$$f(x) = f(a) + k(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve *:*

- ***Condition suffisante*** *: si une telle écriture est possible, on a :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} k$$

ce qui montre que f est dérivable en a, et admet k pur nombre dérivé en a.

- ***Condition nécessaire*** *: si f est dérivable en a, on a :*

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Cette écriture s'appelle le *développement limité d'ordre* 1 de f en a. Elle sera utile dans certains calculs de limite.

Remarques :
- On peut voir ce développement limité sous l'angle de *l'approximation affine de f en a* : c'est $h \mapsto f(a) + hf'(a)$. C'est la première partie du développement limité, dans laquelle on a posé $h = x - a$.
- Remarquons aussi que $y = f(a) + (x-a) f'(a)$ est l'équation de la *tangente à $\mathscr{C}_f$ en a*.

Exemple : Soit à calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{sinx}$. Écrivons les développements limités de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\cos x = \cos 0 + x\cos'(0) + x\varepsilon_1(x) = 1 + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin x = \sin 0 + x\sin'(0) + x\varepsilon_2(x) = x + x\varepsilon_2(x)$$

donc :

$$f(x) = \frac{x\varepsilon_1(x)}{x + x\varepsilon_2(x)} = \frac{\varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)}$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

On aurait pu aussi constater (et c'est d'ailleurs plus dans l'esprit du programme) que :

$$f(x) = \frac{\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}}{\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}}$$

et constater qu'on a deux taux de variation dont on connaît les limites.

Enfin, on aurait aussi pu écrire :

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{sinx} = \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\tan\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Voici quelques exemples de fonctions pour lesquelles la notion de dérivabilité n'est pas complètement évidente :

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  En effet, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Et si $x \neq 0$,

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

  puisque $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$.

  Remarquons cependant que la fonction dérivée f' n'est pas continue en 0. En effet, $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

- La fonction $g : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. En effet,

  $$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  n'a pas de limite en 0. Cet exemple montre qu'une fonction continue n'est pas forcément dérivable.

Pour terminer cette partie, vous pourrez recopier les tableaux des dérivées usuelles, que vous pouvez trouver dans le livre p.56. Il sera utile de les compléter par les formules sur la dérivée de exp et de $\exp \circ u$, vues plus tôt dans l'année, ainsi que par celle de ln et $\ln \circ u$, que nous verrons plus tard.

On ne rappellera pas tous les bienfaits qu'apporte l'utilisation de la dérivée : étude des variations, recherche d'extrema locaux... Nous verrons de nombreux exemples dans les exercices et autres séances de TD (ainsi bien-sûr que dans les devoirs !).

Exercices :

- Les exercices 1 à 26 p.73 devraient fournir suffisamment d'entraînement pour retrouver tous ses vieux réflexes.

II Compléments

A Dérivation d'une fonction composée

Cette formule généralise celle vue en première[1].

Théorème 4

Soit f définie sur un intervalle J, et u définie sur un intervalle I. On suppose que f et u sont dérivables sur J et I respectivement, et que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$, de sorte que l'on peut considérer la fonction $g = f \circ u$, définie sur I.

Sous ces hypothèses, la fonction g est dérivable sur I, et sa dérivée se calcule ainsi :

$$(\forall x \in I) \;\; g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Preuve *Notons, pour $a \in I$, $t_a(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. On a :*

$$t_a(x) = \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

D'une part $\lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$, d'autre part, en posant $X = u(x)$:

$$\frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} = \frac{f(X) - f(u(a))}{X - u(a)}$$

[1] à moins que votre professeur n'ait été incapable de respecter le programme, et vous ait donné cette formule dès la première... il paraît que certains enseignants ne peuvent s'empêcher de faire du hors programme, comme d'autres font du hors piste !

et comme $u(x)$ tend vers $u(a)$ lorsque x tend vers a, cette quantité tend vers $f'(u(a))$.
Ainsi, on a bien $g'(a) = u'(a) \times f'(u(a))$.

Remarques :

- On retrouve, dans le cas particulier où u est une fonction affine, le résultat du cours de première :

$$(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$$

- La dérivée de $f \circ u$ n'est donc pas $f' \circ u$, et cela se comprend aisément : le sens de variation de u a certainement son mot à dire dans le sens de variation de la fonction composée.

- Ce facteur u' devra être activement recherché plus tard lorsqu'on souhaitera inverser le procédé, et rechercher les fonctions dont la dérivée est une fonction donnée (voir partie "Primitives").

Exercices :

- Exercices 27 à 35 p.74.

- En cours : exercice 36 p.74.

- Exercices 47 à 49 et 51 p.76.

B Dérivées successives

Définition 3 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' (appelée dans ce contexte* dérivée première *de f) est elle-même dérivable sur I, on note f'' (ou $f^{(2)}$) la fonction dérivée de f', elle est appelée* dérivée seconde *de f sur I.*
Plus généralement, on définit, sous réserve d'existence, les fonctions dérivées successives de f par récurrence :

$$f^{(0)} = f \quad \textit{et} \quad (\forall n \geqslant 0)\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Exemples :

- En physique, si $f(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t, $f'(t)$ désigne sa *vitesse instantanée*, et $f''(t)$ *son accélération.*

- On utilise souvent les dérivées successives d'une fonction f lorsque l'étude de la dérivée première f' ne permet pas immédiatement d'en déterminer le signe.

  Soit par exemple à déterminer la position au voisinage de l'origine des courbes représentatives de la fonction sin et de la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{x^3}{6}$.

  On pose $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$, et on trouve : $g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

  Comme on ne sait pas trouver le signe de g', on dérive à nouveau : $g''(x) = -\sin x + x$.

  À ce stade, soit on connaît des choses sur la fonction sin et sa tangente en 0, soit on dérive une dernière fois : $g'''(x) = -\cos x + 1$, et enfin, il est possible de trouver le signe de cette quantité.

Pour finir, on "empile" les tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'''(x)$		$+$		$+$	
$g''(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit de tout ceci que $x \geqslant \sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, les inégalités étant retournées sur $]-\infty; 0]$.

Exercices :

- Exercices 37 à 40 p.74.
- Exercices 58 et 59 p.77.

C Demi-tangentes, tangentes verticales

Il se peut qu'une fonction f ne soit pas dérivable en un point d'abscisse a, mais qu'on puisse quand même parler de tangentes en ce point.

Considérons l'exemple du livre : soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$.

f est clairement dérivable sur $]-\infty; 0[$ (où on a $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$) et sur $]0; +\infty[$ (où on a $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

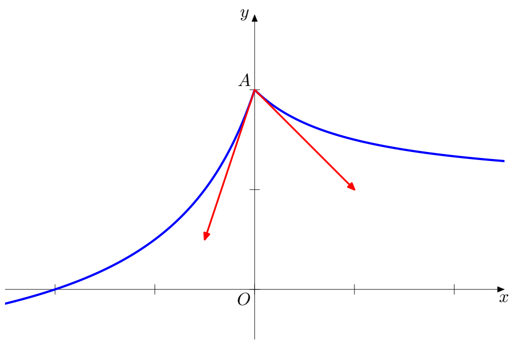
La présence de la valeur absolue au dénominateur oblige à considérer à part la dérivabilité de f en 0. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x} = \begin{cases} \dfrac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \dfrac{-1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x} = \dfrac{3}{-x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc les limites du taux de variation en 0 à gauche et à droite ne coïncident pas. On appelle alors *nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en* 0 le nombre

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ (resp. } f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{)}$$

On a ici $f'_d(0) = -1$ alors que $f'_g(0) = 3$. Ces deux nombres existant, mais étant différents, on dit que le point d'abscisse 0 est *point anguleux* de la courbe. On peut tracer les deux demi-tangentes à la courbe (voir figure plus bas).

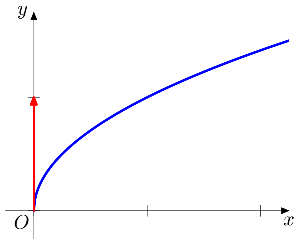


Un autre cas fréquent est celui où la fonction f n'est pas dérivable en a, mais où le taux de variation admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a. La courbe admet alors une *tangente verticale* au point d'abscisse a.

Un exemple classique est celui de la fonction racine carrée :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc la courbe représentative de la fonction racine admet une demi-tangente verticale à l'origine.



Exercices :

- Exercices 42 p.75, 67 p.79.
- Exercice 80 p.80.

III TP : étude de la fonction tangente

Quelques résultats que vous devriez connaître à propos de la fonction tangente :

- $\boxed{\tan = \dfrac{\sin}{\cos}}$.
- tan est définie partout où cos ne s'annule pas, donc $\boxed{D_{\tan} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[}$.
- cos et sin sont 2π-périodique, donc tan l'est aussi. En fait, on a même mieux : pour tout $x \in \mathbb{D}_{\tan}$:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

  donc $\boxed{\text{tan est } \pi\text{-périodique}}$. On peut donc limiter son étude à un intervalle d'amplitude π.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

  donc $\boxed{\text{tan est impaire}}$. On peut donc limiter son étude à l'intervalle $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- sin et cos sont dérivables sur I_0, et cos ne s'y annule pas. Donc $\boxed{\text{tan est dérivable, et donc continue, sur } D_{\tan}}$. On a :

$$\tan' = \frac{\sin'.\cos - \sin.\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + sin^2}{\cos^2}$$

  Ainsi : $\boxed{\tan' = 1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}}$.
- $\tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = 0$, et

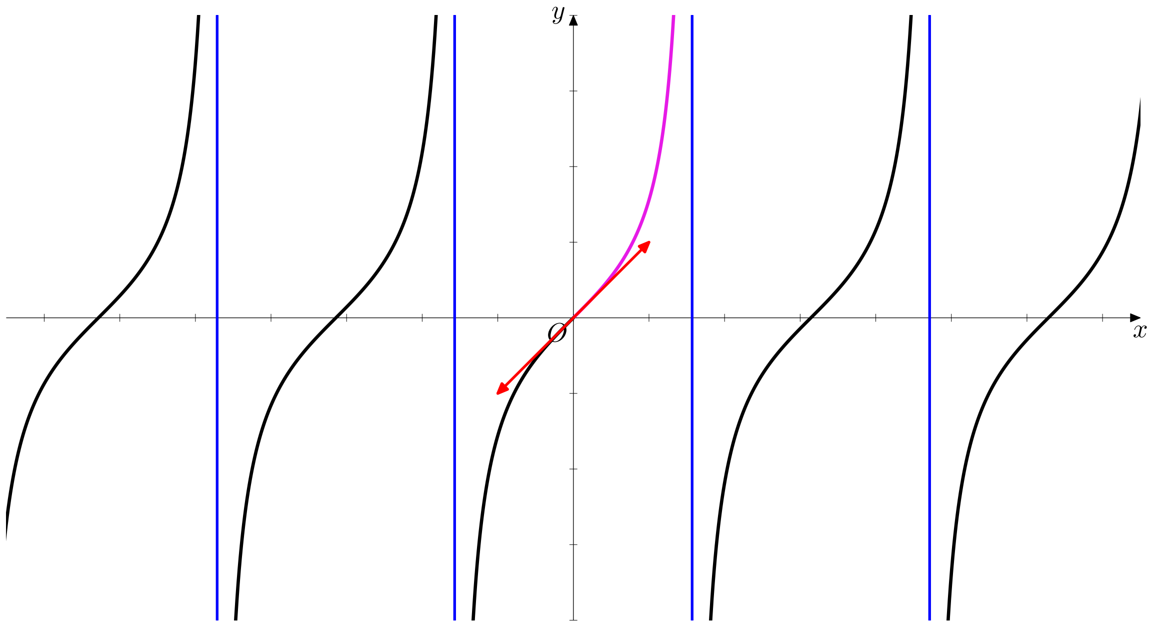
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1 \text{ et } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0^+ \text{ donc } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$$

  La courbe représentative de tan admet donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

- On déduit de ce qui précède que tan est strictement croissante sur I_0, le tableau de variations de tan est donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'$		$+$	
$\tan$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- On finit par la courbe représentative de tan, avec sa tangente à l'origine :



IV Primitives d'une fonction

A Définition

Définition 4 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est* une primitive *de f sur I si F est dérivable sur I, et si $F' = f$.*

Ainsi, pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f, il suffit de prouver que F est dérivable, et que $F' = f$ (il n'est en particulier pas nécessaire de trouver toutes les primitives de f).

On va voir qu'en fait, si l'on connaît une primitive de f, on les connaît toutes :

Théorème 5

Soit f une fonction définie sur I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I, différant entre elles d'une constante.

> ***Preuve*** *En effet, si F est une primitive de f sur I, et si $G = F + C$, alors $G' = F' = f$, donc G est encore une primitive de f sur I.*
>
> *Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $G - F$ a pour dérivée 0, donc est constante sur l'intervalle I (très important, ici, le fait que I soit un intervalle !).*

On notera donc qu'il est très vilain de parler de *la* primitive de f sur I. Par contre, il est possible de préciser une primitive particulière de f, de la façon suivante :

Théorème 6

Si f admet des primitives sur I, il en existe une et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0.

Preuve *Si F est une primitive quelconque de f, toutes les autres sont de la forme $G = F + k$, et*

$$G(x_0) = F(x_0) + k = y_0 \iff k = y_0 - F(x_0)$$

ce qui prouve l'unicité.

Exemple : Trouvons la primitive P de $p(x) = 2x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
On vérifie facilement que $Q(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x$ est une primitive de p sur $\mathbb{R}$, et sa valeur en 1 est $Q(1) = \dfrac{19}{6}$.
On a donc $P(x) = Q(x) - \dfrac{19}{6} = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + x - \dfrac{19}{6}$.

Nous admettrons pour l'instant le théorème suivant :

Théorème 7
Toute fonction *continue* sur I admet des primitives sur I. ★

Autrement dit, la continuité est une condition suffisante pour l'existence de primitives.

B Calcul de primitives

Un tableau de primitives usuelles est simplement un tableau de dérivées lu à l'envers. Reproduire ceux de la page 202.

L'utilisation des formules générales est un peu délicat. Noter que lorsqu'on dérive une fonction composée de la forme $f \circ u$, apparaît toujours, en plus de la dérivée de f, celle de u.

Exemples :

- Pour trouver les primitives de $f(x) = (2x+1)^5$, on peut bien-sûr développer, mais cela est peu pratique. Il est plus intéressant d'écrire

  $$f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2}u'(x).u^5(x)$$

  avec $u(x) = 2x + 1$. On trouve alors : $F(x) = \dfrac{1}{12}u^6(x) + k = \dfrac{1}{12}(2x+1)^6 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- Pour trouver les primitives de $g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$, encore une fois, on constate que

  $$g(x) = \frac{3}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = x^2 + 1$$

  d'où $G(x) = 3\sqrt{u(x)} + k = 3\sqrt{x^2+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices :

- Les exercices 16 à 37 p.215-216 fournissent beaucoup d'exemples pour s'entraîner.
- Pour les gourmands, il n'est pas inutile de jeter un oeil sur les exercices 59 et 60 p.218, ainsi que sur les exercices 62 à 88 p.220-221. Nous essayerons d'en corriger un maximum.

V Notion d'équation différentielle

La recherche des primitives d'une fonction f n'est qu'un cas particulier d'un nouveau type d'équations, appelées *équations fonctionnelles*, dans lesquelles l'inconnue n'est plus un nombre, mais une *fonction*.

Exemples :

- La recherche des primitives d'une fonction f correspond à la résolution de l'équation $y' = f$, d'inconnue y,

- les fonctions paires sont les solutions de l'équation fonctionnelle $(\forall x \in \mathbb{R})\ y(-x) = y(x)$,
- les fonctions T-périodiques sont les solutions de l'équation fonctionnelle $(\forall x \in \mathbb{R})\ y(x+T) = y(x)$...

Dans ce contexte, une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue y est liée à ses *dérivées*. Nous développerons plus loin ce concept, d'abord dans le cours sur l'exponentielle, puis dans un cours spécifique aux équations différentielles. Sachez dès maintenant que votre professeur de physique utilisera souvent les deux équations suivantes :

- $y' = ky$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^k x$, C étant une constante à déterminer en fonction des *conditions initiales*,
- $y' = ky + b$, où b est une constante, dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^k x - \frac{b}{k}$, C étant toujours une constante à déterminer.

CHAPITRE IV

Combinatoire

Sommaire

Introduction

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie normalement équilibrée, elle retombe une fois sur deux sur la face pile. Si l'on répète cette expérience, on peut attribuer une probabilité à l'événement "obtenir k piles après n lancers", en construisant un arbre. Mais le calcul devient vite pénible, surtout si l'on considère une pièce non équilibrée.

Par exemple, pour n lancers, si l'on note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus, on a :

- Pour $n = 1$, la loi de X_1 est :

X_1	0	1
p_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- Pour $n = 2$, la loi de X_2 est :

X_2	0	1	2
p_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

- Pour $n = 3$, la loi de X_3 est :

X_3	0	1	2	3
p_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Mais pour $n = 10$, quelle est la loi de X_{10} ? On peut la trouver, mais cela est beaucoup plus pénible avec nos moyens actuels :

X_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{10}	$\frac{1}{2^{10}}$	$\frac{10}{2^{10}}$	$\frac{45}{2^{10}}$	$\frac{120}{2^{10}}$	$\frac{210}{2^{10}}$	$\frac{252}{2^{10}}$	$\frac{210}{2^{10}}$	$\frac{120}{2^{10}}$	$\frac{45}{2^{10}}$	$\frac{10}{2^{10}}$	$\frac{1}{2^{10}}$

On voit apparaître une certaine régularité, mais les coefficients devant $1/2^{10}$ ne suivent pas un schéma connu pour l'instant. La suite du cours va nous apprendre à calculer ces coefficients et ainsi modéliser de nouvelles expériences aléatoires.

I Généralités

A Définitions

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble fini non vide possédant n éléments.

Dénombrer une partie A de E consiste à trouver son *cardinal*, i.e. le nombre de ses éléments, noté $\text{card}\,(A)$. Le problème se pose en général lorsque A est donné *en compréhension*, c'est-à-dire par une description des éléments de E qui font partie de A. Par exemple : "les mains de belote comportant un couple Valet-9", ou "les numéros de téléphone comportant 4 chiffres identiques".

Ce dénombrement est particulièrement utile en probabilités, en situation d'équiprobabilité, puisque la probabilité d'un événement A est alors égale au cardinal de A divisé par le cardinal de l'univers.

B Quelques grands principes élémentaires

Principe du produit :

ou *principe des boîtes*. Il s'énonce ainsi : si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités *indépendantes* les unes des autres, alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Par exemple, le nombre de codes formés de 2 chiffres entre 0 et 9 et deux lettres parmi A, B, C et D est $10 \times 10 \times 4 \times 4$.

Principe de la somme :

aussi appelé *principe d'inclusion-exclusion*. Il s'écrit, pour deux parties de E, sous la forme :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B)$$

Pour comprendre (et donc retenir) cette formule, il suffit de se dire que lorsque calcule la somme $\text{card}\,(A) + \text{card}\,(B)$, on compte deux fois les éléments de l'intersection $A \cap B$.

Dans le cas particulier où les parties A et B sont *disjointes*, cette formule se simplifie en : $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B)$.

Ce principe se généralise à un nombre quelconque de parties de E, l'observation de la formule pour trois parties montrant le principe :

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A \cup B \cup C) &= \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) + \text{card}\,(C) - \text{card}\,(A \cap B)\\ &\quad - \text{card}\,(A \cap C) - \text{card}\,(B \cap C)\\ &\quad + \text{card}\,(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

relation qui se vérifient bien à l'aide d'un petit dessin.

Ce principe s'utilise le plus souvent dans le cadre restreint suivant : si $A_1, A_2, \dots, A_p$ forme une *partition* de A, i.e. si A est réunion *disjointe* de $A_1, A_2, \dots, A_p$, alors

$$\text{card}\,(A) = card\,(A_1) + \text{card}\,(A_2) + \cdots + \text{card}\,(A_p)$$

qu'on peut dénommer *principe de la somme disjointe*.

Une application directe de ce principe est le dénombrement du *complémentaire* $\complement_E A$ de A dans E : A et $\complement_E A$ forment une partition de E, donc :

$$\text{card}\left(\complement_E A\right) = \text{card}\,(E) - \text{card}\,(A)$$

Parfois, il sera plus simple dans un exercice de probabilité de dénombrer l'événement contraire de l'événement A. Pour vous en convaincre, essayer de compter directement les mots de 5 lettres contenant au moins une fois la lettre A !

Principe de la bijection :

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une *bijection* si à tout élément de l'ensemble d'arrivée correspond *exactement* un élément de l'ensemble de départ, i.e. si tout élément de F a un unique antécédent.

Le principe de la bijection s'énonce alors ainsi : deux ensembles finis E et F en bijection ont le même cardinal. En pratique, lorsqu'on devra dénombrer un ensemble E, il pourra être intéressant de chercher un autre ensemble F, plus simple à compter, dont les éléments peuvent être considérés comme des étiquettes des éléments de E.

Parfois, l'idée sera simplement de simplifier la représentation des éléments de E, d'autres fois, on aura dans le cours une formule qui donnera directement le cardinal de F, parfois encore, la nature des éléments de F permettra d'effectuer des traitements qui n'auraient pas été possibles avec les éléments de E. Nous aurons l'occasion dans les exercices de voir ce principe à l'oeuvre.

EXERCICE : L'exercice 32 p.250 devrait vous rappeler des souvenirs.

C Factorielle

Une fonction sur les entiers va intervenir constamment dans la suite de ce cours : la *factorielle.*

DÉFINITION 5 : *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle* factorielle de n, *ou plus brièvement* factorielle n, *et on note $n!$, le nombre :*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n, \textit{ avec par convention } 0! = 1$$

Remarquons que cette définition peut aussi se donner sous forme récurrente, ce qui est parfois utile dans les démonstrations :

$$0! = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n!$$

EXERCICES :

- Montrer, sans utiliser de calculette, que $6! \times 7! = 10!$.

- Les exercices 1 à 5 p. 247 vous invitent à manipuler cette définition.
- On pourra aussi démontrer la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \sum_{k=0}^{n-1} k.k!$.

II Permutations, p-listes

A Permutations d'un ensemble

Une *permutation* de l'ensemble E est une liste des n éléments de E, rangée dans un certain ordre. L'ordre des éléments de cette liste est important.

Exemples :
- Si $E = \{a; b; c; d\}$, $(a; c; b; d)$ et $(d; c; b; a)$ sont deux permutations de E.
- Si n chevaux participent à une course, la liste ordonnée des arrivées est une permutation de l'ensemble de leurs noms.

Combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à n éléments ? Pour le trouver, utilisons le *principe du produit* (ou *principe des boîtes*, comme certains l'appellent, paraît-il) : écrivons les n termes de la permutation dans n boîtes numérotées.

Pour composer une permutation, nous avons n choix possibles pour la première boîte. Une fois ce premier terme choisi, il reste $n-1$ éléments possibles pour la deuxième boîte, puis $n-2$ choix pour la troisième boîte, et ainsi de suite jusqu'à la dernière boîte pour laquelle nous n'avons plus qu'un seul choix. Ainsi :

Théorème 8
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

★

Par exemple, si 7 chevaux participent à une course, il y a $7! = 5040$ ordres d'arrivée possibles. Si l'on vous propose de parier sur un ordre d'arrivée, vous ne devriez accepter de jouer que si le bon choix vous fait gagner 5040 fois votre mise initiale[1].

La fonction de la calculatrice permettant de calculer des arrangements est $\boxed{\text{n!}}$ ou $\boxed{\text{x!}}$.

Exercices :
- Exercice 6 p.247.
- Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « MARTIN » ? Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?

B p-listes

Une p-liste (ou liste de longueur p) de E est un p-uplet d'éléments de E[2]. Par convention, une 0-liste est une liste ne comportant aucun élément.

Par exemple, $(t; r; u; c; m; u; c; h; e)$ est une 9-liste de l'ensemble $E = \{a; b; c; \ldots; y; z\}$.

Pour dénombrer les p-listes, on doit distinguer le cas des listes dans lesquelles on a le droit de prendre plusieurs fois un même élément de E (les p-listes *avec répétitions*) de celui où les répétitions sont interdites (les p-listes *sans répétitions* ou *arrangements*.

1 p-listes avec répétitions

Théorème 9
Le nombre de p-listes (avec répétitions, si l'on doit préciser) d'un ensemble E à n éléments est n^p.

[1] En fait, vous ne devriez pas accepter de jouer, beaucoup trop d'autres paramètres entrant en jeu, et le jeu de pari en lui-même étant une bien vilaine façon de chercher son bonheur dans ce monde.

[2] C'est donc un élément du produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E = E^p$.

Preuve *Il suffit d'utiliser le principe des boîtes : il y a n façons de remplir la première case de la p-liste, n façons de remplir la deuxième...*

La situation de référence pour les p-listes est le tirage *avec remise* de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Ici, l'*ordre* des termes est important, et on accepte les *répétitions.*

EXERCICES :

- Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 0383 ?
- Combien y a-t-il de codes de carte bleue distincts ?
- Combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à m éléments ?
- Exercice 11 p.247.

2 p-listes sans répétitions, ou arrangements

DÉFINITION 6 : *Un p-arrangement de E (ou p-liste de E sans répétitions) est une p-liste d'éléments* deux-à-deux distincts *de E.*

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est donc un n-arrangement de E.

La fonction de la calculatrice permettant de calculer des arrangements est $\boxed{\text{nPr}}$.

THÉORÈME 10
Le nombre de p-arrangements d'un ensemble E à n éléments est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Il est parfois noté A_n^p. ★

La situation de référence pour les p-arrangements est le tirage *sans remise* de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Ici, l'*ordre* des termes est important, et on n'accepte pas les *répétitions.*

EXERCICES :

- 20 chevaux prennent le départ d'une course ; combien y a-t-il de tiercés distincts ?
- Un porte manteau comporte 7 cintres. De combien de façons peut-on y pendre 5 manteaux ?
- Une application f de E dans F est dite *injective* si deux éléments distincts quelconques de E ont des images distinctes. Combien y a-t-il d'applications injectives d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à m éléments ?
- Exercices 12, 13 et 14 p.247-248.

III Combinaisons

A Définition

DÉFINITION 7 : *Une p-combinaison de E est une* partie *de E à p éléments.*

Les situations dans lesquelles on utilise les combinaisons sont les situations où on doit choisir p objets parmi n, l'ordre n'intervenant pas. C'est le cas en particulier lors d'un tirage *simultané* (et donc sans remise) de p boules dans une urne en contenant n. Par exemple, lors d'un tirage du loto, un tirage de 6 boules parmi 49 est une 6-combinaison de l'ensemble des 49 boules.

B Calcul de $\binom{n}{p}$

Théorème 11
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments est noté $\displaystyle\binom{n}{p}$ (ou parfois C_n^p), il est égal à 0 pour $p > n$, et, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, à

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\dots(n-p+1)}{p\,(p-1)\dots 1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Preuve *Pour $p = 0$, il n'y a qu'une seule partie de E à 0 éléments, à savoir l'ensemble vide, donc* $\displaystyle\binom{n}{0} = 1.$

Si $p \neq 0$, un p-arrangement de E est déterminé par

- *le choix d'une p-partie de E : il y en a* $\displaystyle\binom{n}{p}$ *;*
- *la faon d'ordonner les p éléments de cette partie : il y a $p!$ façon de le faire.*

Ainsi, le nombre de p-arrangements de E vérifie : $\displaystyle A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$*, d'où le résultat.*

La fonction de la calculatrice permettant de calculer les combinaisons est $\boxed{\text{nCr}}$.

Remarques :
La relation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, si elle a le mérite d'être élégante et compacte, et de faciliter un certain nombre de démonstrations théoriques, n'a qu'un intérêt pratique limité.

En effet, il semble tout à fait déraisonnable de l'utiliser pour calculer par exemple $\displaystyle\binom{36}{3}$: il faudrait calculer 36! et 33!, ce qui demande un grand nombre de multiplications, et surtout sort des capacités de calcul exact des calculettes non formelles. On préférera utiliser la formule :

$$\binom{36}{3} = \frac{36 \times 35 \times 34}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 35 \times 34 = 7140$$

calcul qui peut se faire sans machine.

On pourra aussi faire l'exercice 15 p.248 en essayant d'éviter tout recours à la calculette.

Exercices :

- Au poker, on distribue des mains de 5 cartes tirées dans un paquet de 52 cartes.
  a) Combien y a-t-il de mains distinctes ?
  Réponse : il faut choisir 5 cartes parmi 52, donc il y a $\displaystyle\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ mains distinctes.
  b) Combien de mains comportent le valet de trèfle ?
  Réponse : en dehors du valet de trèfle, il faut choisir 4 cartes parmi les 51 restantes, donc il y a $\displaystyle\binom{51}{4} = 249\,900$ telles mains.
  c) Combien de mains comporte exactement deux coeurs ?
  Réponse : il faut choisir 2 coeurs parmi les 13 du jeu, puis 3 cartes parmi les 39 qui ne sont pas des coeurs, il y a donc
  $$\binom{13}{2} \times \binom{39}{3} = 78 \times 9139 = 712\,842$$
  mains comportant exactement deux coeurs.
  d) Combien de mains comportent au moins trois as ?
  Réponse : il faut additionner les mains comportant exactement 3 as et celles en comportant 4 (principe de la somme, une main ne pouvant contenir à la fois 3 as et 4 as). Le nombre de mains de cette forme est donc
  $$\binom{4}{3} \times \binom{48}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 4 \times 1128 + 1 \times 48 = 4560$$

e) Combien de mains ne comportent ni pique, ni le roi de coeur ?

Réponse : il suffit d'enlever le roi de coeur et tous les piques du jeu avant de donner la main, il y a donc $\binom{38}{5} = 501\,942$ telles mains.

- Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone (régulier) à n sommets ? quels sont les polygones qui ont autant de diagonales que de cotés ? quel polygone a exactement 1325 diagonales ?
- Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2; \dots; m\}$?
- Exercices 16, 17, 18, 22 p.248.

IV Propriétés des coefficients du binôme, formule du binôme de Newton

A Quelques propriétés des $\binom{n}{p}$

Propriété 2 (Symétrie)
Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Preuve *La relation* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ *montre immédiatement cette propriété.*

Voici une interprétation ensembliste de cette propriété : choisir une p-partie A d'un ensemble E à n éléments revient à choisir les p éléments qui sont dedans, mais cela revient aussi à choisir les $n-p$ qui ne sont pas dedans (i.e. à choisir la $(n-p)$-partie $\complement_E(A)$.

Cette propriété simplifie en particulier un certain nombre de calculs : il semble plus simple de calculer $\binom{32}{2}$ que de calculer $\binom{32}{30}$.

Propriété 3 (Relation de Pascal)
Pour tout entier n non nul et tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Preuve

- Preuve ensembliste *: soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. Soit a l'un des éléments de E. Les p-parties de E se décomposent en deux catégories :*
  - *celles qui contiennent a : il y en a $\binom{n-1}{p-1}$ (on prend a, puis $p-1$ éléments dans le complémentaire de $\{a\}$),*
  - *celles qui ne contiennent pas a : il y en a $\binom{n-1}{p}$ (on choisit p éléments dans le complémentaire de $\{a\}$).*

  d'où le résultat.
- Preuve algébrique *: en utilisant la relation* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. *Celle-ci est laissée en exercice.*

Une application immédiate de cette formule :

Théorème 12
Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont entiers, pour tout couple d'entiers (n, p).

Preuve *C'est déjà le cas si $p<0$ ou $p>n$, et aussi si $p=0$ ou $p=n$.*

Considérons la propriété $\mathscr{P}_n$: pour tout entier p compris entre 0 et n, $\binom{n}{p}$ est entier.

- $\binom{0}{0}=1$, *donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.*
- *Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier n.*
  On sait que $\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}$ sont entiers, puisqu'égaux à 1.
  Si p est compris entre 1 et n, alors $\binom{n+1}{p}=\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}$ est, d'après l'hypothèse de récurrence, somme de deux entiers, donc entier.
  Ainsi, $\binom{n+1}{p}$ est entier pour tout p compris entre 0 et $n+1$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.
- *Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Une disposition bien pratique pour calculer les coefficients du binôme, exploitant cette relation, est connue sous le nom de *triangle de Pascal*[3] :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	⋮								⋱

EXERCICES :
- Exercice 26 p.248.
- Exercice 48 à 51 p.251 pour des exemples de raisonnements combinatoires conduisant à des relations entre $\binom{n}{p}$.

B Formule du binôme de Newton

THÉORÈME 13

Pour tous complexes a et b, et tout entier $n\geqslant 1$,

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{p}a^{n-p}b^p+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Preuve *L'égalité est clairement vraie pour $n=1$.*

Supposons la vraie pour un entier $n\geqslant 1$. De $(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\times(a+b)=a\,(a+b)^n+b\,(a+b)^n$, on tire, en organisant les calculs :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}=&\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\dots &&+\binom{n}{n}ab^n\\ &+\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\dots &&+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}\end{aligned}$$

[3] mais la disposition est connue depuis bien plus longtemps, les chinois l'ayant déjà découverte quelques centaines d'années auparavant (japonais, bien entendu).

En regroupant les produits similaires (i.e. en sommant la relation ci-dessus colonne par colonne), on obtient des monômes de la forme $\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k$, *et la relation de Pascal nous apprend alors qu'ils peuvent se réécrire* $\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$.

En remplaçant finalement $\binom{n}{0}a^{n+1}$ *par* $\binom{n+1}{0}a^{n+1}$, *et de même* $\binom{n}{n}b^{n+1}$ *par* $\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$, *on obtient bien la relation au rang* $n+1$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Exemples :

- Pour $n = 2$, on obtient la relation bien connue $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Pour $n = 3$, on retrouve une formule souvent rencontrée dans les exercices : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
- En remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}(-b)^p = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

  relation facile à retenir si l'on remarque que les signes devant chaque monôme alternent. Par exemple :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Ces relations sont souvent utiles, non seulement pour développer rapidement des puissances, mais aussi pour démontrer des relations portant sur les coefficients du binôme, donnant ainsi une troisième source de démonstrations.

Exemples :

- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = (1+1)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}1^{n-p}1^p = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$.

  À titre d'exercice, vous pouvez retrouver une interprétation ensembliste de cette relation. Il s'agit de compter les parties d'un ensemble à n éléments, en les regroupant selon leurs cardinaux.
- Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient $0 = (1-1)^n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}$.

Exercices :

- En partant de $f(x) = (1+x)^n$, démontrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
- Existe-t-il trois coefficients binomiaux consécutifs sur une même ligne du triangle de Pascal qui soient en progression arithmétique ?

  Pour les trouver, il suffit d'utiliser la relation $2\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1}$, et de résoudre l'équation du second degré en p en résultant.
- Exercices 27 à 29 p.248.
- Exercice 46 p.251 : retrouver le résultat en trouvant une relation de récurrence vérifiée par A_n.
- Des exercices de révision : A TERMINER.

CHAPITRE V

Produit scalaire dans le plan et l'espace

Sommaire

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan

A Définitions

On a vu dans le cours de première un certain nombre de définitions équivalentes du produit scalaire de deux vecteurs. Rappelons les :

Avec des normes : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \quad (1)$$

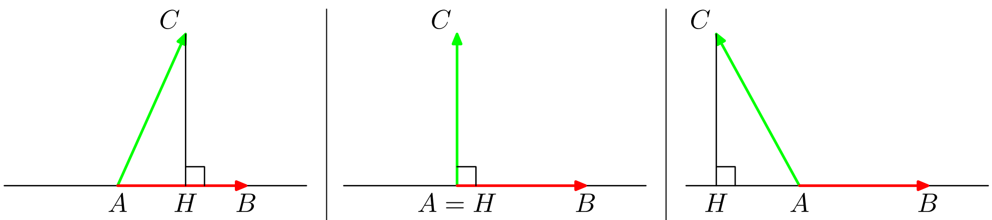
Avec le cosinus : pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2)$$

Avec une projection orthogonale : si $A \neq B$ et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

Cette propriété ne constitue pas à proprement parler une définition du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il faut la compléter en indiquant de quelle manière calculer le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires. Ceci est illustré ci-dessous :



si $H \in]AB)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH > 0$

si $H = A$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

si $H \notin [AB)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH < 0$

Avec des coordonnées en repère orthonormé : si $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x'; y')$ dans un repère orthonormé du plan, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' \quad (3)$$

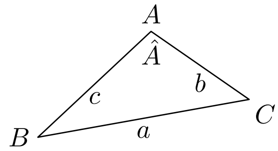
Ce résultat ne dépend bien entendu pas du repère choisi.

B Propriétés

Rappelons quelques propriétés et applications importantes de cette notion :

- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
- Le produit scalaire est compatible avec le produit d'un scalaire par un vecteur : $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab(\vec{u}.\vec{v})$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si[1] $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Donc, en repère orthonormé, $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
- Une conséquence du produit scalaire : la *formule d'Al Kashi* : dans le triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



[1]Attention donc à la bêtise consistant à écrire : « $\vec{u}.\vec{v} = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ » ! De même, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$, mais $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = 0$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ orthogonaux.

C Un complément : distance d'un point à une droite

Rappel : Dans un repère orthonormé, si d a pour équation $ax+by+c=0$, alors $\vec{n}\,(a,b)$ est un *vecteur normal* à d, et $\vec{u}\,(-b,a)$ en est un *vecteur directeur*.

Théorème 14
Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $A\,(\alpha,\beta)$ à la droite d d'équation $ax+by+c=0$ est égale à

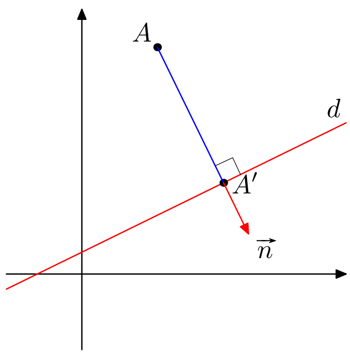
$$d\,(A,d)=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Preuve *:*
Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite d, et (α',β') ses coordonnées. Par définition, $d\,(A,d)=AA'$.
Le vecteur $\vec{n}\,(a,b)$ est normal à la droite d, et $\overrightarrow{A'A}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc $\left|\overrightarrow{A'A}.\vec{n}\right|=\|\vec{n}\|\,AA'$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{A'A}$ sont $(\alpha-\alpha',\beta-\beta')$, donc :

$$|(\alpha-\alpha')\,.a+(\beta-\beta')\,.b|=\sqrt{a^2+b^2}.AA'$$

Or A' est un point de d, donc $a\alpha'+b\beta'=-c$, d'où finalement :

$$AA'=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Remarque : la démonstration de ce théorème ne nécessite pas le calcul des coordonnées de A'.

Exercices :
- Dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $d:2x-3y=6$, et $A\,(5,5)$. Trouver les coordonnées du projeté orthogonal A' de A sur d, en déduire la distance de A à d.

  Retrouver cette distance à l'aide du théorème.
- Dans un repère orthonormé, si d a pour équation $ax+by+c=0$, que représente $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$?
- Les exercices 1 à 7 p.394 permettent de revoir ces notions. En particulier, nous corrigerons les exercices 3 à 7.

II Produit scalaire dans l'espace

A Définition

On peut facilement étendre la définition du produit scalaire de deux vecteurs dans le plan au cas de deux vecteurs de l'espace. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, il existe trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

A, B et C sont bien entendu coplanaires. Notons $\mathscr{P}$ le plan (ABC).

Définition 8 : *Par définition, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté encore $\vec{u}.\vec{v}$, est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.*

Il n'est pas tout à fait évident de montrer, et nous l'admettrons, que cette définition est indépendante des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc du plan $\mathscr{P}$.

Ceci nous permet de donner plusieurs définitions équivalentes du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$;

- si α est une mesure de l'angle[2] $(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}.\vec{v} = \|u\| \times \|v\| \times \cos\alpha$;
- si A et B sont distincts, et si C est un point quelconque de l'espace, considérons le point H intersection de (AB) et du plan perpendiculaire à (AB) passant par C ; H est le *projeté orthogonal* de C sur (AB) ; alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

La définition en termes de coordonnées n'est pas directement transposable, mais on a une petite idée du résultat. Il nous faut l'expression de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

Définition 9 : *Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(x; y; z)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

On en déduit :

Propriété 4
Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}\,(x; y; z)$ et $\vec{v}\,(x'; y'; z')$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

> ***Preuve*** *On a $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$, donc :*
>
> $$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2+2xx'+x'^2\right)+\left(y^2+2yy'+y'^2\right)+\left(z^2+2zz'+z'^2\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2xx'+2yy'+2zz'\right] = xx'+yy'+zz'\end{aligned}$$

B Propriétés

Ce produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que le produit scalaire dans le plan :

- symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$, et les relations symétriques.
- identités remarquables :

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \|u\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|v\|^2\\ (\vec{u}-\vec{v})^2 &= \|u\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|v\|^2\\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) &= \|u\|^2-\|v\|^2\end{aligned}$$

Exercice : Les exercices 8 à 14 p.394 proposent des exemples de calculs de produits scalaires.

III Orthogonalité dans l'espace

A Vecteurs orthogonaux

Définition 10 : *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* orthogonaux *si et seulement si l'un des deux vecteurs est nul, ou si les directions des deux vecteurs sont perpendiculaires.*

Théorème 15
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

> ***Preuve*** *Deux vecteurs sont toujours coplanaires, donc c'est une simple conséquence du cours de première S.*
>
> *Rappelons la démonstration : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (c'est le célèbre théorème de Pythagore !).*

[2] non orienté ! en effet, quelques expérimentations vous convaincrons qu'il n'est pas possible d'orienter des angles dans l'espace.

Or on a par définition $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$*. Donc* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *orthogonaux équivaut encore à* $\vec{u}.\vec{v} = 0$*.*

Exercices :

- Les exercices 15 à 20, 23 et 24 p.395 permettent de pratiquer cette notion.

- Exercices 35, 37, 44 p.397-398.

B Vecteur normal à un plan

Dans ce qui suit, on dira que $\vec{u}$ est un vecteur du plan (P) s'il existe deux points A et B de (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (autrement dit, $\vec{u}$ appartient à la *direction* du plan (P)).

Définition 11 : *Un vecteur* $\vec{n}$ *est dit* normal *au plan* (P) *si et seulement si il est non nul et orthogonal à tout vecteur de* (P)*.*

Deux vecteurs non colinéaires d'un plan constituant une base de ce plan, on a la propriété suivante :

Propriété 5
Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit normal au plan (P), il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).

Preuve *En effet, la condition est clairement nécessaire (qui peut le plus peut le moins).*

Réciproquement, si $\vec{n}$ *est orthogonal à deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de* (P)*, tout vecteur* $\vec{w}$ *de* (P) *peut s'écrire (et ce de façon unique, mais ça n'est pas le propos ici) sous la forme* $a\vec{u} + b\vec{v}$ *(*$(a;b)$ *est alors le couple de coordonnées de* $\vec{w}$ *dans la base* $(\vec{u}, \vec{v})$*).*

On a alors : $\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{n}.\vec{u} + b\vec{n}.\vec{v} = 0$*, donc vvn est bien orthogonal à* $\vec{w}$*.*

Remarques :

- Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan, ils sont tous colinéaires entre eux.

- Deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.

- Une droite (D) est orthogonale au plan (P) si et seulement si tout vecteur directeur de (D) est normal au plan (P) (en fait, il suffit qu'*un* vecteur directeur de (D) soit normal à (P)).

- Deux plans sont *perpendiculaires* si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Attention à la non unicité : il y a une infinité de plans perpendiculaires à un plan donné passant par un point. Par contre, si une droite D n'est pas orthogonale à un plan P, il existe un unique plan π contenant D et perpendiculaire à P.

  Preuve *Soit* $\vec{n}$ *un vecteur normal au plan* P*, et* $\vec{u}$ *un vecteur directeur de* D*. Par hypothèse,* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *ne sont pas colinéaires. Si* A *est un point quelconque de* D*, le plan* π *ne peut être que le plan passant par* A *et dirigé par* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$*.*

  Remarquons que cette unicité tombe en défaut lorsque D *est orthogonale à* P *(auquel cas* $\vec{n}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires).*

Exercice : 21 et 22 p.395.

IV Applications

A Équations de plans

Théorème 16
Soit A un point, et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan normal à $\vec{n}$ passant par A.

> ***Preuve*** *C'est à peu près évident : dire que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ revient à dire que la droite (AM) est orthogonale à la droite D passant par A dirigée par $\vec{n}$, soit que M appartient au plan orthogonal à D passant par A.*

Ceci va nous permettre d'obtenir la caractérisation d'un plan par les coordonnées de ses points.

Théorème 17
Dans un repère orthonormal, tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec a, b et c non tous les trois nuls).

Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre réels, a, b et c étant non tous les trois nuls, l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$.

> ***Preuve*** *On vient de voir que, si $A\,(x_0;y_0;z_0)$ est un point du plan $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, soit :*
>
> $$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$
>
> *qui est bien de la forme annoncée.*
>
> *Réciproquement, si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M\,(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, soit $(x_0;y_0;z_0)$ un triplet de solution de cette équation (c'est toujours possible d'en trouver au moins un : si par exemple $a \neq 0$, prendre $x_0 = -\frac{d}{a}$, $y_0 = z_0 = 0$). Ainsi, on a $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.*
>
> *Notons A le point de coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$, et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (a,b,c). L'équation devient :*
>
> $$ax + by + cz + d = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$
>
> *$\mathscr{P}$ est donc le plan normal à $\vec{n}$ passant par A.*

Remarque : Une telle équation n'est pas unique : si $\mathscr{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors les équations de $\mathscr{P}$ sont toutes de la forme $kax + kby + kcz + kd = 0$, avec $k \neq 0$.

Exercices :
- Exercices 25 à 29 p.395 pour pratiquer les équations de plans.
- Exercice 31 p.296 : équations de plans perpendiculaires.

B Distance d'un point à un plan

Comme dans le plan, on a une relation donnant la distance d'un point à une droite dans l'espace :

Théorème 18
Dans un repère orthonormé, la distance du point $A\,(x_0;y_0;z_0)$ au plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d\,(A,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

> ***Preuve*** *elle est similaire à celle dans le plan : on note $A'\,(x';y';z')$ le projeté orthogonal de A su (P). Par définition, $d\,(A,(P)) = AA'$.*
>
> *Le vecteur $\vec{n}\,(a;b;c)$ est un vecteur normal au plan (P). Il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{A'A}$, donc $\left|\overrightarrow{A'A}.\vec{n}\right| =$*

$\|\vec{n}\|\, AA'$. Ainsi :

$$d\left(A,(P)\right) = AA' = \frac{a\left(x_0 - x'\right) + b\left(y_0 - y'\right) + c\left(z_0 - z'\right)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

puisque, A' appartenant au plan (P), on a $ax' + by' + cz' = -d$.

EXERCICES :

- Exercice 30 p.395 pour s'entraîner.
- Exercices 40 p.397, 42 p.398.

C Plan médiateur

THÉORÈME 19

L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Preuve *dire que $MA = MB$ revient à dire que $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2$, soit, en faisant intervenir le point I, milieu de $[AB]$:*

$$\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 0 \iff \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right).\left(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \iff 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = 0$$

Ainsi, l'ensemble des points M équidistants de A et B est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par I.

EXERCICE : 49 p.399.

D Équations de sphères

THÉORÈME 20

En repère orthonormé, la sphère de centre $\Omega\left(x_0; y_0; z_0\right)$ et de rayon R a pour équation

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = R^2$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

est l'équation d'une sphère (éventuellement réduite à un point ou totalement imaginaire).

Preuve *Tout provient de la caractérisation $\overrightarrow{M\Omega}^2 = R^2$.*

EXERCICES :

- TD 6 p.393.
- Exercices 50, 53 p.399.

En DM, vous ferez les exercices 45 p.398, 56 p.399 et 67 p.401.

CHAPITRE VI

La fonction exponentielle

Sommaire

I Introduction

Dans une source radioactive, on ne sait pas, pour un atome donné, prédire à quel moment il va se désintégrer. Par contre, la probabilité qu'il se désintègre pendant une unité de temps est la même pour tous les loyaux, et ne dépend pas du temps. Cette probabilité de désintégration, notée λ, est une caractéristique du matériau radioactif, c'est la *constante radioactive*. Plus elle est grande, plus le nucléide est instable.

Notons N_0 le nombre initial de noyaux dans la source, et $N(t)$ le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t.

Dans une unité de temps suffisamment petite, la proportion de noyaux se désintégrant est $(N(t+1) - N(t))/N(t)$. Cette quantité est par définition égale à λ. Ainsi, on a :

$$N(t+1) \approx (1-\lambda) N(t)$$

Cette relation nous permettrait de calculer une table de valeurs de la fonction N.

Si maintenant nous supposons la fonction N dérivable, on sait que $N(t+1) - N(t) \approx (t+1-t) N'(t)$ (c'est l'approximation affine de N). En combinant cette relation avec la précédente, on obtient :

$$N'(t) \approx -\lambda N(t)$$

On traduit cette relation en disant que N est *solution de l'équation différentielle* $y' = -ly$. On rencontre, dans le monde de la physique, de nombreuses situations de ce genre, dans lesquelles une certaine quantité (position, concentration...) vérifie une relation avec ses dérivées. De telles relations, de la forme $f(x, y, y', y'', \ldots) = 0$, sont encore appelées "équations différentielles".

II L'équation $y' = y$

Nous allons, dans ce cours, nous intéresser à une équation différentielle relativement simple : $y' = y$. Cette équation pose la question suivante : quelles sont les fonctions qui sont dérivables, et égales à leur dérivée ?

A Un lemme important

Lemme 1
Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* I. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I. ★

Ce résultat est admis, sa démonstration nécessitant un théorème qui n'est pas à votre programme.

Remarquons qu'on peut traduire l'énoncé du lemme sous la forme suivante : les solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ sont les fonctions constantes.

B Une première propriété

Propriété 6 (ROC)
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$. Si $f(0) \neq 0$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

> ***Preuve*** *Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = y$, telle que $f(0) = a \neq 0$*[1]*.*
> *Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) f(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et*
>
> $$g'(x) = f'(x) f(-x) - f(x) f'(-x) = f(x) f(-x) - f(x) f(-x) = 0$$
>
> *donc d'après le lemme préliminaire, g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = a^2 \neq 0$, on en déduit que g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour f.*

[1] remarquons qu'on ne sait pas si une telle fonction existe : ce raisonnement est fait "sous réserve d'existence"

C De l'importance d'une condition initiale

Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation $y' = y$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $g = \lambda f$. Il est facile de vérifier que g est encore solution de $y' = y$. Il en est d'ailleurs de même de $f + g$.

Ainsi, si l'équation $y' = y$ admet au moins une solution non nulle, elle en admet une infinité. On ne peut donc pas parler de *la* solution de l'équation $y' = y$.

On va ajouter une condition, pour garantir l'unicité (toujours sous réserve d'existence) de cette solution.

Théorème 21
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction sera appelée *fonction exponentielle*, et notée exp. Ainsi :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Preuve *L'existence est admise, elle sera démontrée à l'occasion d'un devoir en temps libre lors du cours sur les suites réelles.*

Prouvons l'unicité. Soit f_1 et f_2 deux fonctions solutions[2] de l'équation différentielle $y' = y$, et vérifiant la même condition initiale $y(0) = 1$.q

Considérons $g = \dfrac{f_2}{f_1}$. g est définie sur $\mathbb{R}$, car f_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie :

$$g' = \frac{f_2' f_1 - f_2 f_1'}{f_1^2} = \frac{f_2 f_1 - f_2 f_1}{f_1^2} = 0$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $g(0) = \dfrac{f_2(0)}{f_1(0)} = 1$, on en déduit que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f_2(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D Construction de la courbe représentative de la fonction exp

Cette partie a été traitée en TD. On en rappelle le principe.

On choisit un *pas* $h > 0$. Partant de $\exp(0) = 1$, on a un premier point $A_0(0; 1)$ de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de exp.

On a $\exp'(0) = 1$, on construit la tangente à la courbe représentative de exp en 0. Elle a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$. Le point d'abscisse h de cette tangente est certainement très proche du point de même abscisse de $\mathscr{C}$. Notons $x_1 = h$ et $y_1 = h + 1$ ses coordonnées.

Supposons avoir construit par cette méthode les points A_0, A_1,..., A_n. Si $A_n(x_n; y_n)$ était un point de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en A_n aurait pour coefficient directeur y_n. Le point d'abscisse $x_{n+1} = x_n + h$ de cette tangente a pour ordonnée

$$y_{n+1} = hy_n + y_n = y_n(1 + h)$$

Ainsi, (x_n) est une suite arithmétique de raison h et de premier terme 0, alors que y_n est une suite géométrique de raison $1 + h$ et de premier terme 1.

Cette relation et un tableur permettent de tracer quelques points e la courbe approchée. Intuitivement, plus le pas est petit, plus la précision est bonne, puisque la courbe et la tangente sont alors beaucoup plus proches l'une de l'autre. Le malheur, c'est que pour aller loin, il faut du coup effectuer plus de pas, et que cela dégrade la précision. Trouver un bon compromis n'est pas simple.

Tout ce qui nous intéresse ici est l'allure de la courbe. On verra plus tard que mathématiquement, en faisant tendre *conjointement* le pas vers 0 et le nombre de pas vers l'infini, on obtient la définition de $\exp(x)$ sous forme d'une limite de suite suivante :

$$\exp(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

[2]Constatons que nous n'avons pas besoin de raisonner par l'absurde en supposant les deux fonctions distinctes.

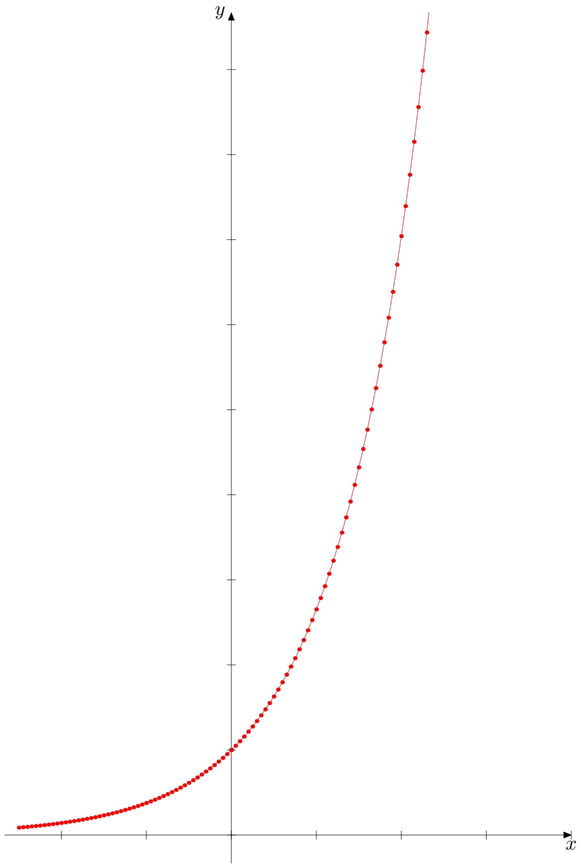


Fig. VI.1: Courbe de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

Exercices :

- Exercices 11 à 16 p.101 pour des calculs de dérivées faisant intervenir la fonction exponentielle.
- Exercices 18 et 19 p.101 pour des exemples d'études de fonctions et de tracés de courbes.

III La fonction exponentielle : propriétés algébriques

A Une relation fonctionnelle fondamentale

Théorème 22

La fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, non nulle, telle que $f'(0) = 1$, vérifiant *l'équation fonctionnelle* :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \; f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Preuve *Commençons par montrer que la fonction* $\exp$ *vérifie bien ces conditions. C'est vrai immédiatement concernant l'hypothèse* $\exp'(0) = 1$*, par définition de* $\exp$*.*

Soit $y \in \mathbb{R}$ *fixé. Puisque* $\exp$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$*, on peut considérer la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et*

$$g'(x) = \frac{\exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

Ainsi g *est constante sur* $\mathbb{R}$*, et de* $g(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$*, on déduit que*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = g(0) = \exp(y) \iff (\forall x \in \mathbb{R}) \; \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Reste à prouver l'unicité. Supposons que f est non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie $f'(0) = 1$ et $(\forall (x,y))\ f(x+y) = f(x) f(y)$.

Fixons un réel y, et considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+y) = f(x) f(y)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie $g'(x) = f'(x+y) = f'(x) f(y)$.

En particulier, en $x = 0$, $g'(0) = f'(0+y) = f'(y) = f'(0) f(y) = f(y)$ puisque $f'(0) = 1$. Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' = y$, et vérifie $f'(0) = f(0) = 1$. D'après la partie précédente, $f = \exp$.

Ainsi, la fonction exponentielle est une "machine" à transformer des sommes en produits, ce qui aura de nombreuses conséquences par la suite.

Voici quelques autres propriétés algébriques de la fonction exponentielles :

Théorème 23

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad \exp(nx) = (\exp(x))^n, \quad \exp(-nx) = \frac{1}{(\exp(x))^n}$$

Preuve *La première propriété vient de l'étude préliminaire : on sait que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

La deuxième propriété découle de la relation fondamentale et de la première propriété (remplacer y par $-y$).

La troisième et la quatrième propriétés se démontrent par récurrence, ou en étudiant la fonction auxiliaire f définie par $f(x) = \dfrac{\exp(nx)}{(\exp(x))^n}$.

B Nouvelle notation

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$. En particulier, $\exp(n) = (\exp(1))^n$. On note e le nombre $\exp(1) \approx 2,718$. On a alors :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ \exp(n) = e^n$$

On convient de généraliser cette notation à tout réel x, en posant $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette notation se révélera cohérente avec nos connaissances sur les puissances, et en fait les généralise. e^x se lit "exponentielle x" ou "e puissance x".

Dans notre nouvelle notation, les propriétés algébriques de l'exponentielle se notent :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad \text{et} \quad e^{nx} = (e^x)^n$$

pour tous réels x et y et tout entier relatif n.

Exercice : Exercices 1, 2 et 3 p.101

IV Étude de la fonction exponentielle

A Sens de variation

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2u} = (e^u)^2$. En appliquant cette propriété à $u = \frac{x}{2}$, on obtient :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x = \left(e^{x/2}\right)^2$$

et en particulier, $e^x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme de plus la fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x > 0$$

Or $\exp' = \exp$, donc la dérivée de la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$. exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Deux conséquences importantes de cette propriété :

$$(1)\ e^a = e^b \iff a = b \qquad\qquad (2)\ e^a < e^b \iff a < b$$

Ceci nous permettra de résoudre des équations et inéquations comportant des exponentielles.

EXERCICES :

- Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $e^x + 1 = 0$

b) $e^{3x+1} - e^{-x} < 0$

c) $\dfrac{1}{e^{2x}} \geqslant 1$ (on rappelle que $e^0 = 1$)

d) $e^{x^2} = \left(e^{-x}\right)^2 e^3$

e) $(e^x)^3 \leqslant \dfrac{1}{e}$

f) $e^{2x} + 2e^x < 3$

- Exercices 4 à 10 p.101 pour d'autres équations et inéquations.

B Limites en $\pm\infty$

PROPRIÉTÉ 7

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Preuve *Soit f la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur I, et $f'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur I, et de $f(0) = 1$, on tire que[3] $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Ainsi, $e^x \geqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.*

D'autre part, pour tout réel x, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$. Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc e^{-x} tend vers $+\infty$, d'où la deuxième limite..

On peut dire des choses plus précises concernant le comportement de exp en + et $-\infty$:

PROPRIÉTÉ 8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Preuve (non exigibles)

On peut reprendre la même idée que pour la démonstration de $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Considérons $g : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$. Encore une fois, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et $g'(x) = e^x - x$. On sait que cette fonction garde un signe strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, donc g est strictement croissante, et prend la valeur 1 en 0.

Ainsi, $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, ce qui prouve que $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ pour tout x positif, résultat que l'on peut réinterpréter sous la forme :

$$(\forall x \geqslant 0)\ \ \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

[3] Remarquer qu'on peut en fait démontrer bien plus que cela : $e^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est un exercice intéressant, qui a de nombreuses conséquences, tant graphiques que numériques.

Le théorème de comparaison permet alors de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Pour la limite en $-\infty$ *de* xe^x*, posons* $X = -x$*. On a* $xe^x = Xe^{-X} = \dfrac{X}{e^X}$*, quantité qui tend vers* $+\infty$ *lorsque* X *tend vers* $+\infty$ *(et donc quand* x *tend vers* $-\infty$*). En prenant l'inverse, on obtient bien* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Enfin, en écrivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{x/n}\right)^n}{n^n\,(x/n)^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n$$

en posant $X = \dfrac{x}{n}$*, on obtient par composition de limites* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$*, et aussi* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ *en posant* $X = -x$.

Intuitivement, la limite de l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances de x (mais ce genre de raisonnement conduit parfois à des grosses âneries, et ne doit surtout pas apparaître dans vos copies).

Exercices :

- Trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3-x} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{3-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+2}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x - x + 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} (x-2)\,e^{-x}$$

- Exercices 21 à 26 p.102 pour d'autres exemples de limites.
- Exercice 27 p.102.
- Exercices 31 et 34 p.102.

C Tableau de variations et courbe détaillée

Les études précédentes permettent de dresser le tableau de variations de exp :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$\exp(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

On peut tracer, à partir de ces renseignements, la courbe représentative de exp. Ajoutons au graphique deux tangentes en les points d'abscisses 0 et 1 :

- la tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\exp(0) = 1$, et passe par le point $A(0,1)$, elle a pour équation $y = 1 \times (x-0) + 1 = x + 1$,
- celle au point d'abscisse 1 passe par $B(1,e)$, a pour coefficient directeur $\exp(1) = e$, elle a pour équation $y = e(x-1) + e = ex$; on peut remarquer qu'elle passe par l'origine.

D Dérivées des fonctions de la forme $\exp \circ u$

Par application du théorème de dérivation d'une fonction composée, on obtient le

Théorème 24
Si u est dérivable sur un intervalle I, la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur I, et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = u'(x)\,e^u(x)$$

Preuve *Le théorème donne :* $f'(x) = u'(x) \times \exp'(u(x))$*, il suffit de remplacer* $\exp'$ *par* $\exp$.

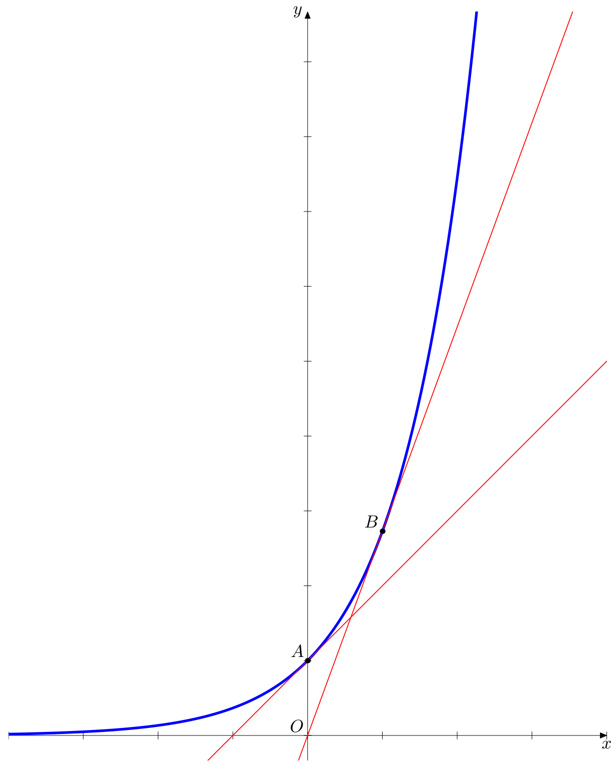


FIG. VI.2: Courbe de la fonction exponentielle

Remarquons au passage que, $\exp(u(x))$ restant strictement positif sur I, le signe de $(\exp \circ u)'$ est exactement celui de u'. Cela n'est d'ailleurs pas étonnant : la fonction exponentielle étant strictement croissante, elle conserve les inégalités, et donc transmet les variations sans les changer.

E Approximation affine en 0

Pour terminer cette présentation de la fonction exponentielle, donnons l'approximation affine de exp en 0 : de $\exp'(0) = 1$, on tire

$$\exp(h) \approx \exp(0) + \exp'(0)(h - 0) = h + 1$$

EXERCICES :

- Le TD 2 p.97 fait trouver des encadrements intéressants du nombre e par des suites, en étudiant des fonctions contenant des exponentielles. On obtiendra en particulier :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant e \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{2}{n!}$$

  La deuxième formule, en particulier, donne $e \approx 2{,}7182818284591$ avec 13 décimales exactes en calculant le $16^{\text{ème}}$ terme de chacune des deux suites.

- Dérivation : exercices 37 à 44 p.103.
- Travail avec les courbes : 61 et 62 p.105.
- Études de fonctions : 63 p.106.
- DM : 72 p.107, 98 p.112.

CHAPITRE VII

Formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes

Sommaire

I Forme trigonométrique d'un nombre complexe

A Module, argument

Définition 12 : *Soit $z \in \mathbb{C}$, et M le point d'affixe z dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.*

- *Le* module *de z, noté $|z|$, est égal à OM.*
- *Si $z \neq 0$, on appelle* argument *de z tout réel θ mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*

Exemples :
- $|i| = 1$, et $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\,(2\pi)$.
- $|2| = 2$, et $\arg(2) = 0\,(2\pi)$.
- $|-3| = 3$, et $\arg(-3) = \pi\,(2\pi)$.
- $\left|\sqrt{3} + i\right| = 2$, et $\arg\left(\sqrt{3} + i\right) = \dfrac{\pi}{6}\,(2\pi)$.

Remarques :
- $|0| = 0$, et même $|z| = 0 \iff z = 0$. Par contre, 0 **n'a pas d'argument**.
- $(|z|, \arg(z))$ constitue un système de coordonnées polaires du point M d'affixe z si $z \neq 0$.
- Si z est réel, alors le module de z est sa valeur absolue (d'où la notation !).
- $\arg(z) = 0\,(2\pi) \iff z \in \mathbb{R}^{*+}$.
- $\arg(z) = \pi\,(2\pi) \iff z \in \mathbb{R}^{*-}$.
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,(\pi)$ si et seulement si z est imaginaire pur (non nul).

Définition 13 : *Si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette forme s'appelle la* forme trigonométrique *du nombre complexe z.*

On a les *formules de transformation* permettant de passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, et lycée de Versailles :

Propriété 9
- Si on connaît le module r et un argument θ de z, alors $z = a + ib$, avec $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
- Si on connaît les parties réelle a et imaginaire b de z, alors le module de z est $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, et les arguments de z sont les réels θ tels que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$. ★

Exemples :
- $z = 1 + i$, alors $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et θ est défini par $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}\,(2\pi)$. Donc $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- Si $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, alors $a = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ et $b = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$, d'où $z = \sqrt{3} - i$.

Exercices :
- Exercices 22, 23, 26, 27 et 29 p.334.
- Exercices 65 et 66 p.338 pour des exemples d'ensembles de points du plan décrits par les modules et arguments des affixes de leurs points.

B Propriétés

Voici deux propriétés du module et de l'argument[1] d'un nombre complexe :

Théorème 25
Pour tous complexes non nuls z et z' :

- $|zz'| = |z|\,|z'|$, et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$.

Preuve • *Posons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, avec $r > 0$ et $r' > 0$. Alors*

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)\right] \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

donc, comme $rr' > 0$, $|zz'| = rr' = |z|\,|z'|$, et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$.

La démonstration pour le quotient est laissée en exercice, elle se trouve dans le livre page 324.

Remarques :
On retiendra les deux “règles” suivantes :

- Pour multiplier deux complexes, on multiplie les modules et on ajoute les arguments.
- Pour diviser deux complexes, on divise les modules et on soustrait les arguments.

Corollaire 1
- Pour tout complexe non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$.
- Pour tout complexe z non nul et tout entier relatif n, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi)$.

Preuve • *Le premier point résulte du théorème sur le quotient.*
- *Le deuxième point se démontre par récurrence sur n (ou $-n$).*

Exercices :
- Exercices 30 p.334, 31 et 32 p.335.
- Exercice 33 p.335 pour des ensembles de points.
- Exercice 49 p.337, 71 t 73 p.339.

C Formule de Moivre

Voici une application de ce qui précède : c'est la célèbre

Théorème 26 (formule de Moivre)
Pour tout $\theta \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Preuve *C'est une simple application des relations donnant les module et arguments de z^n en fonction de ceux de z : $\cos\theta + i\sin\theta$ est de module 1, et θ est l'un de ses arguments.*

[1] Attention : il est légèrement abusif de parler de *la* fonction argument. En toute rigueur, une telle fonction a pour ensemble d'arrivée un ensemble de *classes d'équivalences*, la classe $\overline{\theta}$ correspondant en fait à tous les réels de la forme $\theta + 2k\pi$.

Une application de cette relation est la transformation d'expressions de la forme $\cos nx$ ou $\sin nx$ en polynômes en $\sin x$ et/ou $\cos x$.

Par exemple :

$$\cos 4x + i\sin 4x = (\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i\cos x \sin^3 x + \sin^4 x$$

donc, en séparant parties réelles et imaginaires :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$
$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x = 4\sin x\left(2\cos^3 x - \cos x\right)$$

L'opération inverse, consistant à transformer des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ en expression de la forme $\cos nx$ et $\sin nx$, est appelée *linéarisation.* Nous l'utiliserons souvent lors du calcul de certaines primitives, et nous verrons comment faire dans la prochaine section.

II Forme exponentielle d'un nombre complexe

A Définition

On vient donc de voir que tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $\cos\theta + i\sin\theta$. On note souvent $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Considérons alors la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ définie par $\varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. On remarque d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(\theta)^n = \varphi(n\theta)$. Plus généralement, $\varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta)\varphi(\theta')$. Cela ne vous rappelle rien ? Si, hein ?

Et si l'on essayait de dériver φ ? En admettant qu'on peut dériver une fonction à valeurs complexes en considérant i comme une simple constante, on a :

$$\varphi'(\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)' = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = i\varphi(\theta)$$

Cette fois-ci, plus de doute, la fonction φ a de furieuses similitudes avec la fonction exponentielle. C'est pourquoi nous adopterons la "convention" suivante :

Définition 14 : *Le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* θ *est noté* $e^{i\theta}$*. Ainsi :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ainsi, par exemple, $e^{i\pi/2} = i$, et $e^{i\pi} = -1$. Cette dernière relation est tout à fait remarquable puisqu'elle réunit trois constantes fondamentales en mathématiques : les nombres e, i et π !

Plus généralement, on peut écrire ainsi tout nombre complexe non nul :

Définition 15 : *Le nombre complexe z, de module r et d'argument θ, est égal à $re^{i\theta}$. Cette notation est la* forme exponentielle *du nombre complexe z.*

On a ainsi maintenant trois façons différentes de noter un nombre complexe. On choisira bien entendu à chaque fois la mieux adaptée aux circonstances, et on s'entraînera à passer le cas échéant d'une forme à l'autre (cf. exercice résolu 9 p.327).

Exercice : Exercices 35, 38 et 39 p.335.

B Propriétés

La notation exponentielle n'est pas vraiment différente de la notation trigonométrique. Elle a l'avantage de la concision, et permet quelques raccourcis intéressants.

Théorème 27
Pour tous $r > 0$, $r' > 0$, $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\left(\theta+\theta'\right)}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i\left(\theta-\theta'\right)}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r'$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$.

Preuve *Ce ne sont que de simples traductions des propriétés de la forme trigonométrique.*

Exercices :

C Propriétés

Voici deux applications de cette notation :

Théorème 28
Formule de Moivre pour tout réel θ, et tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Formules d'Euler pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve *La première est une simple traduction sous forme exponentielle de la formule de Moivre vue sous forme trigonométrique.*
Pour les formules d'Euler, il suffit de tirer $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$ *des relations :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Exercices :

III Applications géométriques

CHAPITRE VIII

Étude des suites réelles

Sommaire

I Différents modes de définition d'une suite

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'un intervalle non borné de $\mathbb{N}$, de la forme $[\![n_0, \infty[\![$).

On peut définir une suite de plusieurs manières différentes. Voici trois types très courants :

- Définition explicite : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$.

  Par exemple, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$, ou $v_n = \sqrt{n-3}$.

- Définition par récurrence : u_{n_0} donné, et $u_n = f(u_{n-1})$, f étant une fonction définie sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$.

  Exemple : $u_0 = 2$, et $u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

  On peut généraliser le procédé : par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est la célèbre *suite de Fibonacci*).

- Suite définie par une somme : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$.

  Par exemple : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$.

Il faut bien comprendre que ces suites se traitent de façons très différentes selon leur définition. En particulier, il devrait vous paraître étrange de ne pas faire de raisonnement par récurrence lors de l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence.

II Suites arithmétiques et géométriques

A Rappels de première S

DÉFINITION 1 :
Une suite (u_n) est dite arithmétique *si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un réel donné, appelé la* raison *de la suite.*

PROPRIÉTÉS 4

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.
- Réciproquement, la suite (u_n) définie par $u_n = a + nr$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = a$.

Preuve

- *Soit $mscrP_n : u_n = a + nr$.*

  $mscrP_0 : u_0 = a + 0 \times r = a$ est vraie.

  Supposons $mscrP_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + r \subset =mscrP_n\, (a + nr) + r = a + (n+1)\, r$$

  donc $mscrP_{n+1}$ est encore vraie.

  $mscrP_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

- *Réciproquement, si $u_n = a + nr$, alors*

$$u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)\, r) - (a + nr) = r$$

  donc (u_n) est bien arithmétique de raison r, de premier terme $u_0 = a + 0 \times r = a$.

Ainsi, pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il n'est pas nécessaire de calculer $u_{n+1} - u_n$.

Propriété 10
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$,

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m = (m - n + 1)\,\frac{u_n + u_m}{2}$$

Mnémotechniquement : "nombre de terme multiplié par la moyenne des termes extrêmes".

> ***Preuve*** *Partons d'une suite de raison 1 : notons* $\mathscr{P}_n : S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.
>
> $\mathscr{P}_1$ *est vraie, les deux membres de l'égalité étant égaux à* 1.
>
> *Supposons* $\mathscr{P}_n$ *vraie pour un certain* n. *Alors :*
>
> $$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$
>
> *donc* $\mathscr{P}_{n+1}$ *est encore vraie.*
>
> *On a alors, plus généralement :*
>
> $$n + (n+1) + \cdots + m = S_m - S_{n-1} = \frac{m\,(m+1)}{2} - \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2} = \frac{(m+n)\,(m-n+1)}{2}$$
>
> *Si maintenant* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* a, *on a :*
>
> $$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \cdots + u_n &= (a + nr) + (a + (n+1)\,r) + \cdots + (a + mr) \\ &= (m - n + 1)\,a + r\,(n + (n+1) + \cdots + m) \\ &= (m - n + 1)\,a + r\,\frac{(m+n)\,(m-n+1)}{2} \\ &= (m - n + 1)\,\frac{(a + nr) + (a + mr)}{2} \end{aligned}$$

Définition 2 :
Une suite (v_n) *est dite* géométrique *si elle vérifie une relation de récurrence de la forme* $v_{n+1} = v_n \times r$, *où* r *est un réel donné, appelé la* raison *de la suite.*

Propriétés 5

- Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = a$ et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a.r^n$.
- Réciproquement, la suite (v_n) définie par $v_n = a.r^n$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme $u_0 = a$. ★

De la même façon, pour démontrer qu'une suite est géométrique, il n'est pas nécessaire de calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Propriété 11
Si (v_n) est une suite géométrique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$,

$$v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m = v_n \frac{1 - r^{m-n+1}}{1 - r}$$

Mnémotechniquement : "premier terme fois un moins la raison puissance le nombre de termes sur un moins la raison" ★

Les preuves de ces énoncés sont laissées en exercices.

Tous ces résultats doivent être connus *par cœur* !

B TD : suites ariméthico-géométriques

À titre de complément, étudions les suites définies par $u_0 = \alpha$, et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = au_n + b$. On rencontre fréquemment ce genre de suites dans les exercices de bac.

Remarquons d'abord que si $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques, et que si $b = 0$, on obtient les suites géométriques. Cette étude est donc une généralisation du cours de première. Dans tous les autres cas, on va utiliser une méthode permettant de se ramener à l'étude d'une suite géométrique :

- on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que (v_n) définie par $v_n = u_n + \lambda$ soit géométrique :
$$v_{n+1} - \lambda = a(v_n - \lambda) + b \iff v_{n+1} = av_n + [b - \lambda(a-1)]$$
et on voit que si $\lambda = \dfrac{b}{a-1}$ (on se souvient qu'on a exclus le cas $a = 1$), (v_n) est géométrique, de raison a, et de premier terme $v_0 = u_0 + \lambda$;
- on utilise le cours sur les suites géométriques : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = v_0 a^n = (\alpha + \lambda) a^n$;
- on revient à la suite (u_n) à l'aide de la relation $u_n = v_n - \lambda$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = (\alpha + \lambda) a^n - \lambda$.

Étudions cette méthode sur deux exemples :

Exemple 1 : $u_0 = 1$, et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = 3u_n - 2$.

On pose $v_n = u_n + \lambda$. (v_n) vérifie la relation de récurrence : $v_{n+1} - \lambda = 3(v_n - \lambda) - 2$, soit $v_{n+1} = 3v_n - 2(1 + \lambda)$. On choisit donc $\lambda = -1$.

(v_n) est alors géométrique de raison 3, on a $v_n = v_0.3^n$, d'où $u_n = v_n + 1 = v_0.3^n + 1$. mais au fait, que vaut v_0 ? Et bien $v_0 = u_0 + \lambda = 1 - 1 = 0$! On a donc $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et on se rend compte qu'on aurait peut-être dû s'en inquiéter un peu plus tôt ! En calculant, pour se faire une petite idée, deux ou trois termes de la suite (u_n), on se serait rendu compte immédiatement que $u_1 = u_2 = \cdots = 1$, d'où le résultat par une récurrence immédiate (enfin, au moins plus rapide que l'artillerie lourde déployée ci-dessus !).

Exemple 2 : exercice 67 p.183 : $u_0 = -2$, et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$.

Ici, pas de blague, $u_1 = -\dfrac{7}{3}$, $u_2 = -\dfrac{23}{9}$... Le calcul de quelques valeurs semble montrer que (u_n) converge vers -3 en décroissant, ce que nous allons confirmer.

L'énoncé suggère de poser $v_n = u_n + 3$. On a donc : $v_{n+1} - 3 = \dfrac{2}{3}(v_n - 3) - 1 = \dfrac{2}{3}v_n - 3$, d'où $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$.

(v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_n = 1$. On a donc $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, d'où $u_n = v_n - 3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$.

La suite (v_n) est positive et de raison comprise entre 0 et 1, elle converge donc vers 0 en décroissant, donc (u_n) converge vers -3 en décroissant.

La fin de l'énoncé propose de calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Oe :

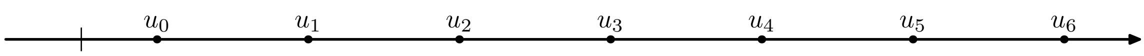
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k - 3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) - 3(n+1) = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 3(n+1) \\ &= 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3(n+1) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3n \end{aligned}$$

On en déduit facilement que (S_n) diverge vers $-\infty$.

III Diverses formes de représentations graphiques d'une suite

A Représentation sur un axe

On représente simplement les termes successifs sur un axe, en les numérotant. Par exemple, pour la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + 2n$, on obtient :



L'intérêt n'est pas énorme, mais cela est parfois suffisant pour se faire une idée.

B Représentation sous forme fonctionnelle

Ici on exploite le fait qu'une suite (u_n) n'est rien d'autre qu'une *fonction* à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou éventuellement $\mathbb{C}$), dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$. On représente donc simplement cette fonction, avec les indices sur l'axe des abscisses, et les valeurs sur l'axe des ordonnées. Cette représentation graphique est l'ensemble des points $M_n\,(n, u_n)$.

Exemples :
Un exercice d'une épreuve expérimentale de l'an passé proposait d'étudier la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 11$.

Ici, une représentation graphique à l'aide d'un tableur (ou d'une calculatrice, mais c'est moins clair) permettait d'obtenir une formule donnant u_n en fonction de n :

On faisait alors constater à l'élève que la courbe sur laquelle semblaient s'aligner les points M_n ressemblait furieusement à une parabole, dont on trouvait une équation, pour obtenir la formule :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = n^2 - 12n$$

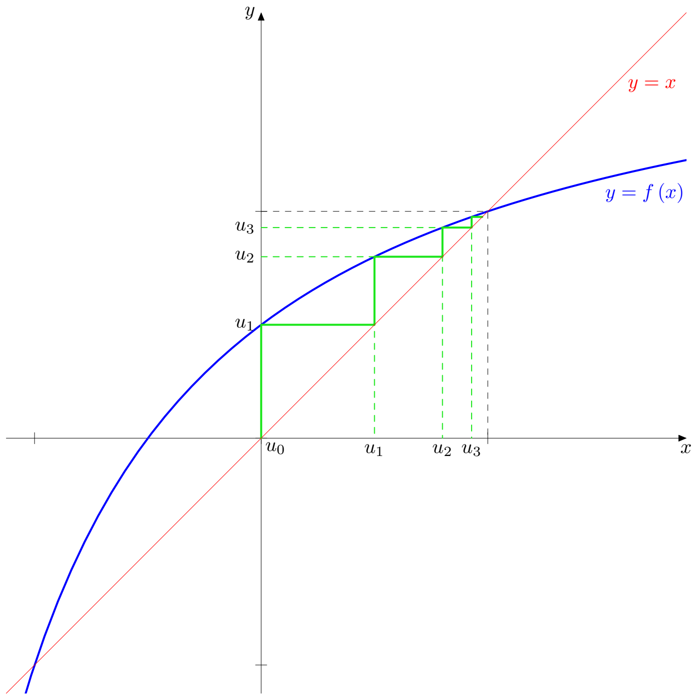
formule qu'il ne restait plus qu'à démontrer par une récurrence simple.

C Représentation des suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f\,(u_n)$

L'idée est ici un peu différente de ce qui précède. Cette construction doit être maîtrisée, parce que l'étude de ces suites s'en trouve franchement simplifiée.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

Il existe des techniques permettant de trouver algébriquement une relation donnant directement u_n en fonction de n, en effectuant un *changement de suite inconnue* de manière à se ramener à une suite géométrique (voir le TD à ce sujet). Ici, nous allons simplement montrer comment construire les premiers termes de cette suite :



On remarque ici que u_n semble tendre vers l'abscisse (ou l'ordonnée) d'un des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la première diagonale, d'équation $y = x$.

La recherche de ces points d'intersection est donc une priorité dans l'étude de ces suites, et leurs abscisses sont appelées les *points fixes* de la fonction f.

Nous reviendrons sur l'étude de ces suites dans un prochain cours.

IV Différents modes de définition d'une suite

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'un intervalle non borné de $\mathbb{N}$, de la forme $[\![n_0, \infty]\!]$).

On peut définir une suite de plusieurs manières différentes. Voici trois types très courants :

- Définition explicite : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$.

  Par exemple, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$, ou $v_n = \sqrt{n-3}$.

- Définition par récurrence : u_{n_0} donné, et $u_n = f(u_{n-1})$, f étant une fonction définie sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$.

  Exemple : $u_0 = 2$, et $u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

  On peut généraliser le procédé : par exemple, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est la célèbre *suite de Fibonacci*).

- Suite définie par une somme : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$.

  Par exemple : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$.

Il faut bien comprendre que ces suites se traitent de façons très différentes selon leur définition. En particulier, il devrait vous paraître étrange de ne pas faire de raisonnement par récurrence lors de l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence.

V Propriétés générales

Définition 3 :
Une suite est dite croissante *(resp.* décroissante*) (à partir du rang n_0) si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$). Elle est dite strictement croissante si l'inégalité est stricte.*

Une suite (u_n) est dite monotone *(toujours à partir du rang n_0) si elle est croissante, ou si elle est décroissante, à partir du rang n_0.*

Une suite (u_n) est dite stationnaire *si il existe un rang n_0 tel que $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exemples :

- Attention : "croissante" n'est pas le contraire de "décroissante" : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.

- Si (u_n) est définie par une fonction f, sous la forme $u_n = f(n)$, et si f est monotone sur un intervalle de la forme $[\![n_0; +\infty[\![$, alors (u_n) est monotone sur ce même intervalle.

  Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \cos \dfrac{\pi}{n}$ est strictement croissante à partir du rang 1. En effet, la fonction $f : x \mapsto \cos \dfrac{\pi}{x}$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

  Attention : la réciproque est fausse !!!

- Si (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut comparer u_n et u_{n+1} en comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

  Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ est strictement croissante à partir du rang 3.

- Si (u_n) est définie par une relation de récurrence, alors en général on étudiera le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction du signe de $u_n - u_{n-1}$.

  Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 16$, et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout n. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Exercices :
Exercices 6 à 14 p.14.

Définition 4 :
Une suite (u_n) est dite majorée *(resp. minorée) s'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant M$) pour tout n.*

Une suite (u_n) est dite bornée *si elle est majorée et minorée.*

Exercices :

- Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$ est bornée.

- Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est bornée.

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geqslant 2^{k-1}$. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bornée. Quelle est sa limite ?

- Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$ est bornée.

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Montrer que cette suite est majorée.

VI Limites

A Définitions

Définition 5 :
On dit qu'une suite (u_n) est convergente *(ou qu'elle* admet une limite finie*) si il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini. On note alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

Exemples :
Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et plus généralement toutes les suites $\left(\frac{1}{n^*}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $\alpha > 0$, ont pour limite 0.

Remarques :
- Cette définition est tout à fait semblable à l'existence d'une limite fine pour une fonction f en $+\infty$.
- Dire que (u_n) converge vers l revient à dire que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$ converge vers 0. On peut donc se limiter à l'étude des limites nulles.
- Dire que tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini revient à dire qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ pour tous les $n \geqslant N$.
- Il faut bien comprendre que la valeur réelle de l'entier N n'a aucune importance (sauf pour des raisons d'analyse numérique dont nous nous préoccuperons plus tard), seule son existence nous importe. Nous nous concentrerons donc sur la recherche de théorèmes permettant de prouver la convergence de suites, plutôt que sur la résolution d'inutiles inéquations.

Définition 6 :
On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou qu'elle diverge *vers $+\infty$) si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini. On note :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

On définit de même une suite admettant pour limite $-\infty$.

Exemples :
Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et plus généralement $(n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $\alpha > 0$, ont pour limite $+\infty$.

Traitons tout de suite le cas des suites que nous connaissons bien : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Théorème 29
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors (u_n) a pour limite $+\infty$ si $r > 0$, $-\infty$ si $r < 0$. Si $r = 0$, bien-sûr, la suite (u_n) est constante.
- La suite géométrique (u_n) de premier terme 1 et de raison q a pour limite 0 si $-1 < q < 1$, $+\infty$ si $q > 1$, est constante si $q = 1$, et n'a pas de limite si $q \leqslant -1$. ★

Exercices :
- Exercices 1 à 7 et 10 p.177.
- Exercices 49, 50, 52, 69 et 72 p.183.

B Théorèmes

Voici un certain nombre de théorèmes permettant de démontrer la convergence d'une suite sans avoir à revenir à la définition. On cherchera systématiquement à les utiliser, pour simplifier les raisonnements.

Commençons par signaler que tous les théorèmes sur les opérations sur les limites vus dans le cadre des fonctions restent valables dans le cas des suites : limites et somme, produit, quotient. Les problèmes (et les méthodes) liées aux *formes indéterminées* déjà rencontrés ($\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$) sont encore valables dans le cas des limites de suites.

Voici quelques théorèmes plus directement liés à la notion de suite.

Théorème 30 (Suite du type $u_n = f(n)$)
Soit f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[n_0; +\infty[$, et (u_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant n_0$ par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$ (resp. $+\infty$, $-\infty$), alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$ (resp. $+\infty$, $-\infty$).

> ***Preuve*** *Faisons la dans le cas d'une limite finie l. Si $\varepsilon > 0$ est donné, par définition, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $|f(x) - l| < \varepsilon$.*
>
> *Si l'on note N un entier supérieur strictement à A, on a alors, pour tout $n \geqslant N$:*
>
> $$|u_n - l| = |f(n) - l| < \varepsilon$$
>
> *puisque $n \geqslant N > A$. On a ainsi reconstitué la définition de $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$.*
>
> *Le cas des limites infinies est laissé en exercice.*

Théorème 31 (Limite et composition)
Soit (u_n) une suite réelle, et f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tel que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent (au moins à partir d'une certain rang) à l'intervalle I. Soit encore l et l' deux lettres désignant soit des réels, soit $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$, et si $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = l'$. ★

Exercice : Exercices 11 à 24 p.178.

Voici maintenant un théorème très important, qui permet de prouver l'existence de limites dans de nombreux cas :

Théorème 32 (de comparaison, ou des gendarmes)
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.

- Si, pour tout $n \geqslant N$, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$, et si $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n = l$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$.
- Si pour tout $n \geqslant N$, $w_n \leqslant u_n$, et si $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.
- Si pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$, et si $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$. ★

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n + 3}$ a pour limite 1. Les théorèmes sur les opérations ne permettent pas de conclure, alors qu'en constatant que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ w_n = \frac{n-1}{n+3} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n+3} = v_n$$

on vérifie que $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n = 1$ (factorisation ou utilisation de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t + \alpha}{t + 3}$) et il suffit d'appliquer le théorème de comparaison.

Exercices :
- Exercices 7, 8 p.177.
- Exercices 58 à 64 p.182.

Nous ne donnerons pas de méthodes générales pour l'étude des suites définies par une relation de récurrence, mais les différents exercices vus en TD donnent un plan de bataille qui sera souvent repris dans les énoncés. En particulier, un petit dessin permet souvent de se faire une idée des résultats à démontrer.

VII Théorèmes liés au sens de variation

Voici pour finir quelques résultats montrant les liens entre la monotonie et la convergence. Le premier résultat montre en particulier qu'une suite monotone a nécessairement une limite. Ces théorèmes ont une grande importance, puisqu'ils permettent de prouver la convergence d'une suite *sans avoir besoin de trouver sa limite.*

A Convergence monotone

Théorème 33

Soit (u_n) une suite réelle croissante. De deux choses l'une :

- soit (u_n) est majorée, auquel cas elle converge,
- soit (u_n) n'est pas majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$.

Preuve *(hors programme)*

Si (u_n) n'est pas majorée, cela signifie que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$. Comme (u_n) est croissante, $u_n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci signifie bien que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Si (u_n) est majorée, l'ensemble des majorants de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément[1], que nous noterons l.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est, par définition de l, pas un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant l - \varepsilon$. La croissance de (u_n) entraîne alors $l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci signifie bien que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrons que (u_n) diverge vers $+\infty$.

  Tout d'abord, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.

  Ensuite, on démontre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2}$. En effet, $u_{2^0} = u_1 = 1 + \frac{0}{2}$, et :

  $$u_{2^{p+1}} = u_{2^p} + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{p}{2} + 2^p \frac{1}{2^{p+1}} = 1 + \frac{p+1}{2}$$

  ce qui montre que la propriété est héréditaire.

  (u_n) n'est donc pas majorée, d'après le théorème précédent, sa limite est nécessairement $+\infty$.

- Soit maintenant (v_n) la suite définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrons que (v_n) converge.

  Comme cette suite est clairement croissante, il suffit de démontrer que (v_n) est majorée. Pour cela, on démontre, par récurrence, que $v_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

Exercices :

- Exercices 28 à 38 p.178 et 179.
- Exercices 49, 51, 53, 56 p. 181.

[1] Ceci est une propriété topologique de $\mathbb{R}$, qui n'a absolument rien d'évident, ce qui explique le caractère hors programme de cette démonstration. On ne pourrait par exemple pas remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

B Suites adjacentes

Théorème 34

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que :

- (u_n) est croissante (H_1),
- (v_n) est décroissante (H_2),
- pour tout n, $u_n \leqslant v_n$ (H_3),
- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$ (H_4).

Alors (u_n) et (v_n) convergent, vers la même limite.

Preuve *Il est facile de montrer par récurrence que, pour tout n,*

$$u_0 \underset{H_1}{\leqslant} u_n \underset{H_3}{\leqslant} v_n \underset{H_2}{\leqslant} v_0$$

Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc converge, et (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge aussi (et l'on a besoin pour démontrer cela uniquement des trois premières hypothèses).

Notons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, et $l' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. En utilisant le théorème sur la limite d'une somme (valable parce que *l'on vient de prouver que (u_n) et (v_n) étaient convergentes), on obtient alors :*

$$0 = \lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0 = \lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n = l' - l$$

ce qui montre que $l = l'$.

Remarque : L'hypothèse (H_3) est en fait inutile, c'est une conséquence des trois autres (s'il existe un rang n_0 pour lequel $v_{n_0} < u_{n_0}$, alors par monotonie ceci perdure pour tout $n \geqslant n_0$, et interdit d'avoir $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - un_{=}0$). Mais en général, elle ne pose pas de problème.

Exemple : Les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ sont adjacentes, leur limite commune est, comme on l'a vu dans le TD 2 p.97, le nombre d'Euler e (la décroissance de (v_n) peut sembler surprenante, et n'est pas tout à fait triviale).

Exercices :

- Exercices 39 à 45 p.179.
- Exercices 74 à 79 p.184 et 185.
- Un exercice complet pour terminer ce cours : l'exercice 82 p.185 propose l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. Nous la ferons intégralement en cours.
- On terminera par les exercices 78 p.185 et 91 p.187, ainsi que par la définition séquentielle de l'exponentielle à partir de la méthode d'Euler.

CHAPITRE IX

Le conditionnement

Sommaire

I Rappels du cours de première

- Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut prédire l'issue à l'avance.
- *L'univers* de cette expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
- Un *événement* est une partie de l'univers. Un événement élémentaire est une partie de l'univers ne comportant qu'un seul élément.
- Étant donnés deux événements A et B, on peut construire les événements $A \cap B$ («A **et** B»), $A \cup B$ («A **ou** B») et $\overline{A}$ (**non** A).
- Deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.
- Définir une probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire consiste à associer à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ un réel p_i positif ou nul, de sorte que la somme de tous les p_i soit égale à 1.

  On vérifie au passage que ceci impose $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ pour tout i.
- La probabilité d'un événement A est alors la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.

  On notera que le choix du "protocole" lors d'une expérience du genre "on tire au hasard..." peut avoir une grosse influence sur le calcul des probabilités de chaque événement élémentaire.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'*équiprobabilité*.

  Dans le cas où l'univers comporte n éléments, la probabilité de chaque événement élémentaire est alors $\frac{1}{n}$, et la probabilité d'un événement A est

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

- Deux formules utiles :

$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) \qquad\qquad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

  Dans le cas particulier où A et B sont incompatibles, on a donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Une *variable aléatoire* X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- La *loi* d'une variable aléatoire est la donnée de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des valeurs prises par X, et des probabilités de chaque événement $p(X = x_i)$.

  Intuitivement, cela revient à définir une probabilité sur l'ensemble des valeurs prises par X.
- Étant donnée une variable aléatoire X, on définit :
  - son *espérance* $E(X) = \sum_x^n xp(X = x)$
  - sa *variance* $V(X) = \sum_x^n (x - E(X))^2 p(X = x)$
  - son *écart-type* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

  Une formule utile à retenir : $V(X) = \sum_x x^2 p(X = x) - E(X)^2$.

  Preuve *En effet :*

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_x^n (x - E(X))^2 p(X = x) = \sum_x p(X = x)\left(x^2 - 2xE(x) + E(X)^2\right) \\ &= \sum_x p(X = x)\,x^2 - 2E(X)\sum_x p(X = x)\,x + E(X)^2 \sum_x p(X = x) \\ &= \sum_x p(X = x)\,x^2 - 2E(X)^2 + E(X)^2 = \sum_x x^2 p(X = x) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Exercices :

- TD 1 p.265.
- Le TD 2 a été vu en DM, il peut être refait à titre de correction. Il constitue une bonne introduction à la notion de *probabilité conditionnelle.*
- Exercices 1 à 10 p.269.
- Exercices 40 et 45 p.274.

II Probabilités conditionnelles

A Introduction

On considère le jeu suivant : on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. On note F l'événement "la carte est une figure", et R l'événement "la carte est un roi".

Il est facile de voir que $P(F) = \dfrac{16}{52}$ et $P(R) = \dfrac{4}{52}$. En effet, l'univers Ω de l'expérience est constitué des 52 cartes, et on est en situation d'équiprobabilité.

Supposons que le joueur affirme "la carte tirée est une figure". Quelle est alors la probabilité que cette figure soit un roi ?

On peut rester dans le même univers, pour répondre à cette question, il suffit de changer la loi de probabilité. Ici, chacune des 12 figures a la même chance d'être tirée, toutes les autres cartes ont une probabilité nulle d'être tirées.

Dans ce nouvel espace, la probabilité de tirer un roi est $\dfrac{4}{12}$. On constate qu'on peut trouver cette probabilité sous la forme

$$P_F(R) = \frac{P(F \cap R)}{P(F)}$$

Cette probabilité s'appelle "probabilité conditionnelle de R sachant F".

B Définition

Soit Ω un univers muni d'une probabilité P, et A un événement de Ω *de probabilité non nulle.* L'application

$$P_A : B \mapsto \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

est une nouvelle probabilité sur Ω, appelée *probabilité conditionnelle.* $P_A(B)$ se lit "probabilité de B *sachant* A".

C Conséquences

Propriété 12

Si A est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout B, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. ★

On a donc bien une formule pour calculer la probabilité de l'intersection de deux événements, mais il est important de ne pas l'écrire bêtement $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, relation en général fausse (sauf en cas d'indépendance, ce que nous verrons prochainement).

D Arbres pondérés

Une conséquence importante de cette définition se manifeste lorsqu'on utilise un arbre pondéré pour résoudre un exercice.

Un chemin dans un tel arbre va de la racine à une feuille, il représente l'événement intersection de tous les événements rencontré en route.

Le calcul des probabilités dans un tel arbre suit un certain nombre de règles, qu'on utilisera sans démonstration :

Règle 1 La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 (c'est la *loi des nœuds*).

Règle 2 La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités des branches constituant ce chemin.

Règle 3 La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

Cette dernière règle provient de la *loi des probabilités totales*, que nous allons voir maintenant.

E Loi des probabilités totales

On a, dans les différents devoirs, déjà employé la formule :

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$$

qui provient du fait que $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ constituent une partition de l'événement A. En termes de probabilités conditionnelles, on traduit ceci sous la forme :

$$\boxed{P(A) = P(B)\, P_B(A) + P\left(\overline{B}\right) P_{\overline{B}}(A)}$$

C'est la *loi des probabilités totales*, dans le cas $n = 2$. Plus généralement :

Théorème 35
si $B_1, \ldots, B_n$ sont n événements tels que :

- chaque B_k a une probabilité non nulle,
- deux quelconques d'entre eux sont incompatibles,
- leur réunion est égale à l'univers Ω.

(on traduit ces deux dernières conditions en disant que $B_1, \ldots, B_n$ forment une *partition* de l'univers Ω.

Alors, pour tout événement E :

$$P(E) = P(B_1)\, P_{B_1}(E) + P(B_2)\, P_{B_2}(E) + \cdots + P(B_n)\, P_{B_n}(E) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P_{B_i}(E) \qquad \bigstar$$

Exercices :

- Un exercice d'application directe : trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent chacune 5 boules. La première contient trois boules rouges et deux boules noires, la deuxième deux boules rouges et trois noires, la troisième une boule rouge et quatre noires.

  Martin lance un dé équilibré. S'il fait 1, il tire une boule de l'urne U_1. S'il fait 3 ou 5, il tire une boule de l'urne U_2. Enfin, s'il fait 2, 4 ou 6, il tire une boule de l'urne U_3.

  a) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?
  b) La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

- Travail avec des arbres : 11, 17 p.270, 20 p.271, 50 p.275, 57 p.276.
- Divers : 12 à 15 p.270, 53 p.275.
- DM : exercice 70 p.280.

III Indépendance

A Indépendance d'événements

Intuitivement, deux événements sont *indépendants* si la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de réalisation de l'autre.

Définition 16 : *Soit (Ω, P) un univers probabilisé. Deux événements A et B sont dits* indépendants *si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :*

$$P_A(B) = P(B) \qquad P_B(A) = P(A) \qquad P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Exercice : Démontrer l'équivalence de ces trois conditions.

Attention à ne pas faire la confusion sotte et grenue avec la notion d'incompatibilité, qui n'a rien à voir : si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, alors que s'ils sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, donc, sauf dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les deux notions n'ont rien à voir !

Exemple : On lance deux dés, A désigne l'événement "le premier dé amène un nombre pair", B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".

On a $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{2}$ et $P(B \cap C) = 0$ (faire un arbre !).

Ainsi, A et B sont indépendants, mais A et C sont dépendants, et B et C sont incompatibles (et dépendants !).

Exercices :

- A et B sont supposés indépendants. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont-ils ? Et $\overline{A}$ et B ?

  La réponse est oui, reste à le démontrer.

- 26 à 29 p.272.

B Indépendance de variables aléatoires

Définition 17 : *Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω, prenant respectivement les valeurs x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et y_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$.*

On dit que ces deux variables sont indépendantes *si, pour tout i et pour tout j, les événements "$X = x_i$" et "$Y = y_j$" sont indépendants.*

La façon la plus simple de démontrer l'indépendance ou la dépendance de deux variables aléatoires consiste à faire un tableau à double entrée.

Exemple : On lance deux dés, on considère les variables aléatoires X et Y définies par :

- X prend la valeur 1 si le résultat est pair, la valeur -1 sinon ;
- Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, la valeur 1 sinon.

Les lois de chacune des deux variables sont :

x_i	-1	1
$P(X = x_i)$	$1/2$	$1/2$

y_i	1	2
$P(Y = y_i)$	$2/3$	$1/3$

Voici la loi du couple (X, Y) :

$x \backslash y$	1	2	$P(X = x)$
-1	$1/3$	$1/6$	$1/2$
1	$1/3$	$1/6$	$1/2$
$P(Y = y)$	$2/3$	$1/3$	

On constate que ceci est une bête "table de multiplication", les opérandes étant dans la dernière colonne et la dernière ligne. On a donc bien

$$(\forall (i,j))\ \ P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

les variables X et Y sont donc bien indépendantes.

Exercices :

- 30 à 32 p. 272.
- 63 p.278, 67 p.279.
- DM : 70 p.280.

ANNEXE A

Index