TD Dérivation n°2 : étude des variations de fonctions

Étude de variations

1) $\boxed{f(x) = -7x + 3}$

f est une fonction affine, de coefficient directeur négatif, on sait donc qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}$. Le calcul de la dérivée le confirme : $f'(x) = -7$, donc f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$, donc f y est strictement décroissante.

2) $\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et $f'(x) = 2x - 4$.

De $f'(x) > 0 \iff 2x - 4 > 0 \iff x > 2$, on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent en appliquant le théorème sur la limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme (égale d'après ce théorème à la limite du monôme de plus haut degré).

3) $\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4}$

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 3\left(-x^2 + 2x + 3\right)$. Les racines de ce trinôme sont -1 et 3 (à l'aide du discriminant ou de tête), et on sait qu'il est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) sauf entre ses racines.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-9	↗	23	↘	$-\infty$

4) $\boxed{f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 5}$

$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + x = x\left(8x^2 - 9x + 1\right)$. Les racines du trinôme entre parenthèses sont 1 et $\frac{1}{8}$. On peut faire un tableau de signe de f', pour en déduire le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$1/8$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$8x^2-9x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$\frac{10245}{2048}$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

5) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}}$

f est une fonction rationnelle, elle est définie et dérivable partout où son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

f se dérive comme le quotient des fonctions $u : x \mapsto 2x - 3$ et $v : x \mapsto 2x + 4$.

$$f'(x) = \frac{2.(2x+4) - (2x-3).2}{(2x+4)^2} = \frac{14}{(2x+4)^2}$$

f' est donc toujours positive, f est donc strictement croissante sur chacun des deux intervalles composant son ensemble de définition :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent en appliquant le théorème sur la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{2x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2} = 1$$

et de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Les limites en -2 à gauche et à droite s'obtiennent par application du théorème sur la limite d'un quotient :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 2x-3 = -7 \\ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 2x+4 = 0^- \end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \frac{2x-3}{2x+4} = +\infty$$

et de même $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \dfrac{2x-3}{2x+4} = -\infty$.

6) $\boxed{f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}}$

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. Elle se dérive comme quotient de fonctions :

$$f'(x) = 2\frac{1.\left(x^2-9\right) - x.2x}{\left(x^2-9\right)^2} = -2\frac{x^2+9}{\left(x^2-9\right)^2}$$

Ainsi, f' est négative sur $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, donc f est strictement croissante sur chacun des trois intervalles $]-\infty;-3[$, $]-3;3[$ et $]3;+\infty[$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Les limites s'obtiennent comme précédemment.

7) $\boxed{f(x) = \dfrac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}}$

Le dénominateur s'annule en -1 et 3, f est donc définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(-2x+2).\left(x^2-2x-3\right) - \left(-x^2+2x+11\right).(2x-2)}{\left(x^2-2x-3\right)^2} = \frac{16-16x}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

8) $\boxed{f(x) = x\sqrt{x+3}}$

f est le produit de deux fonctions, $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \sqrt{x+3}$, définie sur $[-3;+\infty[$, mais dérivable seulement sur $]-3;+\infty[$.

$$f'(x) = 1.\sqrt{x+3} + x.\frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Études complètes

1) **Étude de** $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-6x+2}{3x}$

(a) f est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}.\frac{(6x-6).x-\left(3x^2-6x+2\right).1}{x^2} = \frac{3x^2-2}{3x^2}$$

Le numérateur s'annule en $\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, ce qui permet de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites seront justifiées dans la question suivante.

(b) L'écriture $f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{3x}$ se justifie par une simple division. Elle doit s'interpréter de la façon suivante : $f(x)$ est égal à une fonction affine de x, plus une quantité qui va tendre vers 0 lorsque x va tendre vers $\pm\infty$.

Plus précisément :

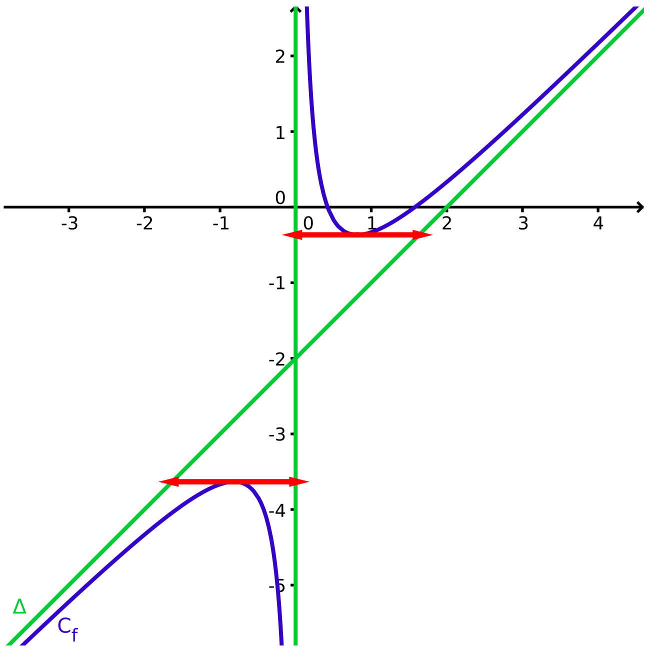
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

ce qui signifie que la courbe représentative de f se rapproche arbitrairement de la droite Δ d'équation $y = x - 2$. Celle-ci est donc bien asymptote à la courbe de f.

De plus, la différence $f(x) - (x-2)$ est du signe de x, donc positif sur $]0;+\infty[$, ce qui signifie que la courbe est au dessus de Δ, et négatif sur $]-\infty;0[$, ce qui signifie que la courbe y est en dessous de Δ.

La même expression de f permet de trouver très simplement les limites de f à gauche et à droite en 0. Ces limites infinies permettent d'affirmer que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de f.

(c) Pour tracer la courbe représentative de f, on commence par placer les "guides" : asymptotes, tangentes horizontales..., puis on place la courbe en s'aidant de ces éléments.



2) **Étude de** $f : x \mapsto \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)}$

(a) Calculons la dérivée de f, en utilisant la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x+2).(x+1)(x-2)-(x+2)^2.(2x-1)}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{(x+2).[2(x+1)(x-2)-(x+2).(2x-1)]}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(-5x-2)}{(x+1)^2(x-2)^2} = -\frac{(x+2)(5x+2)}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

Cette factorisation permet de dresser le tableau de signe de f', et d'en déduire le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{2}{5}$		2		$+\infty$
$(x+2)$		$-$	0	$+$			$+$			$+$	
$(5x+2)$		$-$		$-$		$-$	0			$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{16}{9}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

(b) Les limites en $\pm\infty$ se calculent à l'aide du théorème sur les limites d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:

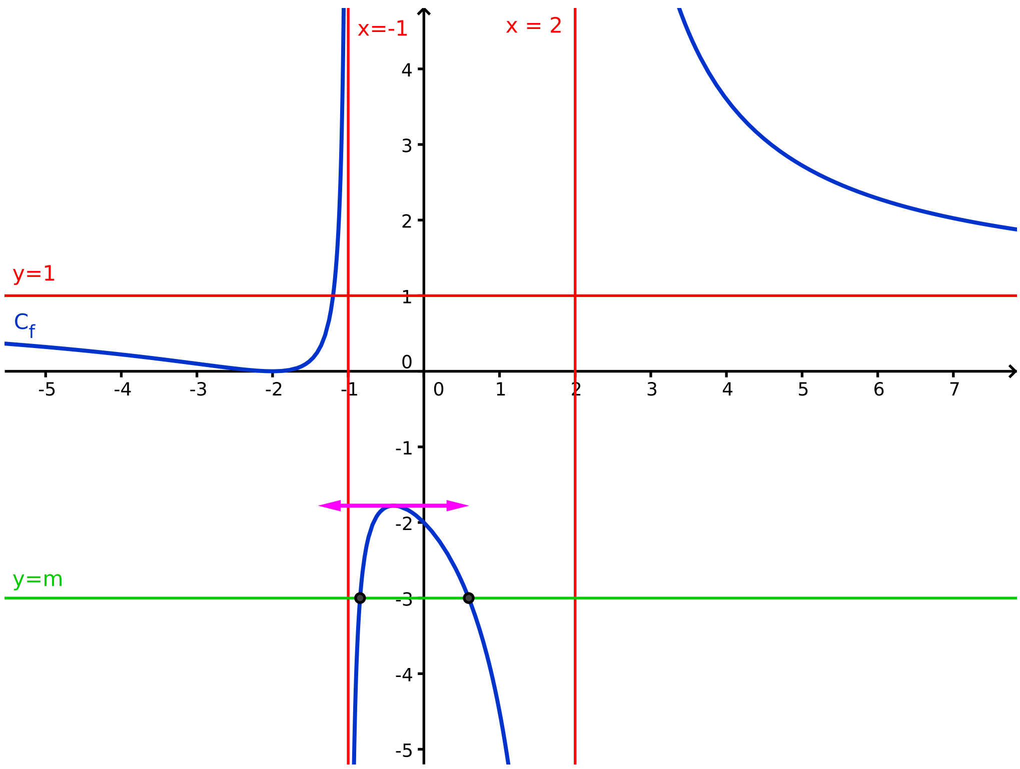
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

dont on déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
Les limites en -1 se déterminent comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+2)^2 = 1 \\ \\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1)(x-2) = 0^+ \end{array}\right\} \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

et de même $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)} = -\infty$. On procède de même pour les limites en 2. Ces limites prouvent l'existence de deux asymptotes verticales, d'équations $x = 1$ et $x = -2$.

(c) Voici la courbe représentative de la fonction f, avec tous les éléments étudiés : les trois asymptotes, ainsi que la tangente horizontale.



(d) Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = m$ (dont un représentant est en vert sur le graphique ci-dessus). Pour étudier cette équation, il suffit donc d'envisager les différents cas possibles de position de cette droite :

- si $m < -\dfrac{16}{9}$, alors l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, une dans l'intervalle $]-1; -2/5[$, l'autre dans l'intervalle $]-2/5; 2[$;
- si $m = -\dfrac{16}{9}$, alors l'équation $f(x) = m$ a une solution : $-\dfrac{2}{5}$;

- si $-\dfrac{16}{9} < m < 0$, alors l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution ;
- si $m = 0$, alors l'équation $f(x) = m$ a une solution : -2 ;
- si $0 < m < 1$, alors l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, une dans l'intervalle $]-\infty; -2[$, l'autre dans l'intervalle $]-2; -1[$;
- si $m = 1$, alors l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution ;
- enfin, si $1 < m$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, une dans l'intervalle $]-2; -1[$, l'autre dans l'intervalle $]2; +\infty[$.

3) (a) Soit P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$.

i. P est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $P'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)$. On en déduit le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

ii. Le tableau de variations ci-dessus montre que P ne s'annule pas sur $]-\infty; 0]$, puisque son minimum est $\dfrac{7}{4}$.
P est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, et change de signe sur cet intervalle. L'équation $P(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur cet intervalle.
De $P(0) = 2 > 0$ et $P(1) = -5 < 0$, on tire $0 < \alpha < 1$. Une table de valeur montre que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$, puis que $0{,}60 < \alpha < 0{,}61$.
On peut donc dresser le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	

(b) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

i. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

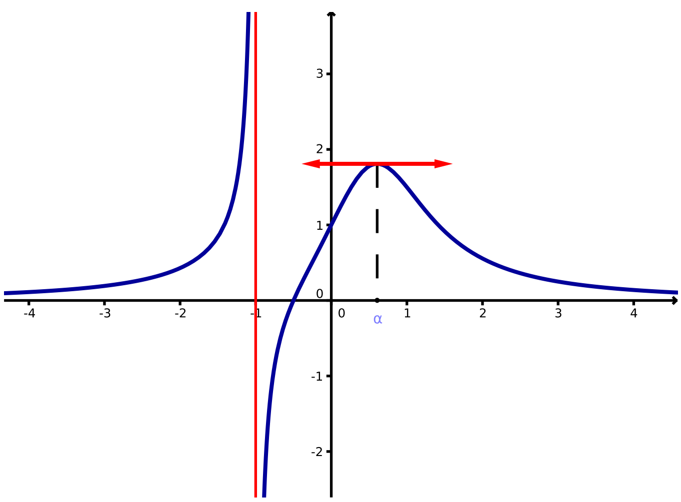
$$f'(x) = \frac{2.\left(x^3+1\right) - (2x+1).3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{P(x)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Ainsi f' est du signe de P. Ça tombe bien, on vient justement de l'étudier !

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ii. Les limites se déterminent comme dans les exercices précédents.

iii. Et pour finir... Tada ! La courbe :



Problèmes divers

1) Pour démontrer une inégalité de la forme $f(x) > g(x)$, on étudie le signe de la différence $f - g$. Appliquons ceci ici : notons $h(x) = \left(x^4 - 3x + 1\right) - \left(2x^3 - 3x - 1\right) = x^4 - 2x^3 + 2$.

$$h'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$$

Le tableau de variations de h est donc :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\frac{5}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations nous apprend que $h(x) \geqslant \dfrac{5}{16}$, donc h ne prend que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que $x^4 - 3x + 1 > 2x^3 - 3x - 1$ pour tout réel x.

2) Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$, et il semble qu'on ne puisse déterminer simplement le signe de f'. D'où l'idée de la considérer comme une fonction g, que l'on va étudier, en la dérivant, bien-sûr !

$g'(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x + 1)$, d'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations nous apprend que g, donc f', s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$, en un réel α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$. De $g(1) = 6 > 0$, on déduit que $0 < \alpha < 1$.

On peut donc maintenant dresser le tableau de signe de f', et donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

On voit que le minimum de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $f(\alpha)$, donc on aimerait bien déterminer son signe. Or, $f(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 + 1 - \alpha$, et $\alpha^4 + \alpha^3 > 0$ puisque $\alpha > 0$, et $1 - \alpha > 0$ puisque $\alpha < 1$.

Finalement, $f(x) \geqslant f(\alpha) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

3) Considérons les fonctions g et h définies sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = x - \sin x$ et $h(x) = \sin x - \dfrac{2x}{\pi}$. On a :

$$g'(x) = 1 - \cos x \quad \text{et} \quad h'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

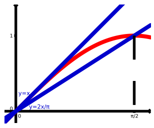
g' reste positive sur I, et h' change une fois de signe, en un point α qui, on va le voir, ne nous intéresse pas vraiment :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0

De ces deux tableaux, on déduit que g et h reste positives ou nulles sur I, ce qui signifie que pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction sin reste entre sa tangente en 0, d'équation $y = x$, et la corde reliant les points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, d'équation $y = \dfrac{2x}{\pi}$.



4) Considérons les deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ et $h(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \cos x$.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$, autant de fois que l'on veut. On a

$$g'(x) = -\sin x + x \quad \text{et} \quad g''(x) = -\cos x + 1$$

g'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc g' est croissante sur $\mathbb{R}$. De $g'(0) = 0$, on déduit le signe de g', donc les variations de g.

- h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$h'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \quad \text{et} \quad h''(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x = g(x)$$

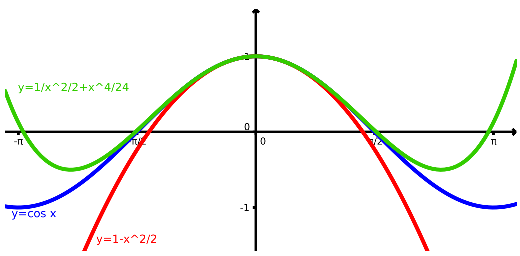
On voit donc que l'on peut empiler les tableaux de variations (et les tableaux de signes qui en découlent) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g(x) = h''(x)$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

De ce tableau, on déduit que g et h ne prennent que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve bien les inégalités : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction cos est “coincée” entre les courbes de deux fonctions polynômes :



On déduit de ceci l'encadrement :

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \leqslant \cos\frac{\pi}{12} \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{12}\right)^4$$

soit à l'aide d'une calculatrice :

$$0{,}9657 \leqslant \cos\frac{\pi}{12} \leqslant 0{,}9660$$

soit trois décimales exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$. C'est avec des techniques de ce genre que les ordinateurs calculent des valeurs approchées de la plupart des fonctions qu'elles “connaissent”.

5) Commençons par constater que les deux fonctions à étudier, à savoir f et g définies par $f(x) = x^3 - 6x$ et $g(x) = 2x - \dfrac{16}{x}$, sont *impaires* (i.e. $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$, pour tous les réels x pour lesquels ces égalités ont un sens). On n'en fera donc l'étude que sur la moitié de leur ensemble de définition, à savoir $[0; \infty[$ pour f et $]0; +\infty[$ pour g.

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$, d'où le tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) $g'(x) = 2 + \dfrac{16}{x^2}$ ne prend que des valeurs strictement positives, donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(c) D'une part, $\displaystyle\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe Γ.

D'autre part, $g(x)$ s'écrit comme somme de $2x$, fonction affine, et $-\dfrac{16}{x}$, fonction de limite nulle en $+\infty$. Ainsi, la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe Γ (et Γ reste en dessous de Δ sur $]0; +\infty[$).

(d) Voir le graphique en fin de corrigé.

(e) Dire que $\mathscr{C}$ et Γ ont un point commun revient à dire que l'équation $f(x) = g(x)$ a (au moins) une solution. À cause de la parité, si A est point commun aux deux courbes, son symétrique par rapport à O est aussi point commun.
Résolvons donc l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = g(x) \iff x^3 - 6x = 2x - \frac{16}{x} \iff x^3 - 8x + \frac{16}{x} = 0 \iff \frac{1}{x}\left(x^4 - 8x^2 + 16\right) = 0$$

On reconnaît une "équation bicarrée", donc on pose $X = x^2$, et on résout l'équation $X^2 - 8X + 16 = 0$. Cette équation a une solution double, $X = 4$, ce qui donne deux solutions pour l'équation $f(x) = g(x)$, symétriques par rapport à l'origine : $x = 2$ et $x = -2$.
Les tangentes aux courbes $\mathscr{C}$ et Γ au point commun B d'abscisse 2 ont pour coefficients directeurs respectifs :

$$f'(2) = 3.2^2 - 6 = 6 \quad \text{et} \quad g'(2) = 2 + \frac{16}{2^2} = 6$$

Ces coefficients directeurs sont égaux, les tangentes sont donc parallèles. Comme elles ont un point commun B, elles sont *confondues*. On dit alors par extension que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont *tangentes* en A et B.