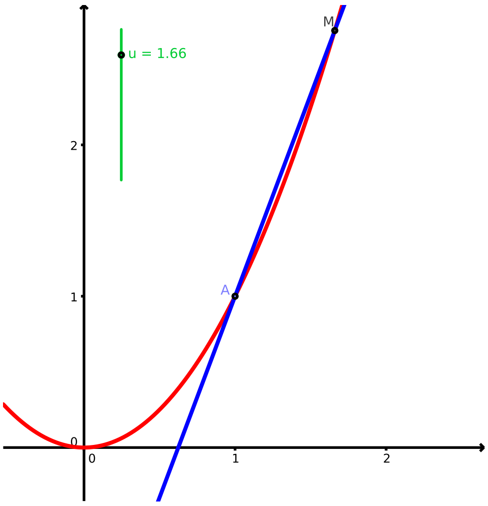
Notes de cours sur la dérivation et quelques unes de ses applications

1 Tangente à une courbe, nombre dérivé

1.1 Nombre dérivé

Observons la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction carré au voisinage du point A d'abscisse 1 :



Sur cette figure, on a tracé une *corde* (AM), i.e. une droite passant par le point A et un point M *distinct de* A. On observe sur l'animation GEOGEBRA que si M se rapproche de A, la droite pivote autour de A, jusqu'à atteindre une "position limite". On appelle cette droite particulière la *tangente* à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Cette tangente a une propriété très particulière : c'est, parmi toutes les droites passant par A, celle qui suit localement la courbe "au plus près[1]".

Le coefficient directeur de cette tangente définit, avec le point A, parfaitement la tangente en A à $\mathscr{C}$. Ce coefficient directeur est appelé *nombre dérivé de la fonction carré en* 1.

Ici, le coefficient directeur de la droite (AM) est

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{x_M^2 - x_A^2}{x_M - x_A} = x_M + x_A$$

On sent bien que lorsque M se rapproche de A, x_M se rapproche de x_A. Plus rigoureusement, le coefficient directeur de la droite (AM) a pour *limite* $2x_A = 2$ lorsque x tend vers x_A. Ainsi, la fonction carrée est dérivable en 1, et son nombre dérivé en 1 est 2.

Plus généralement :

DÉFINITION 1 : *Si la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f admet au point d'abscisse x_0 une tangente, on dit que f est* dérivable *en x_0. Dans ce cas, on appelle* nombre dérivé de f en x_0 *le coefficient directeur de cette tangente, et on le note $f'(x_0)$.*

Ce nombre dérivé peut être défini comme la limite (si elle existe) du coefficient directeur de la corde :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

[1] en un sens qui reste à définir de façon précise, la notion de proximité étant bien peu mathématique.

Il n'est en général pas pratique de calculer cette limite à chaque endroit où on en a besoin. On va donc faire[2] une fois pour toute les calculs pour un certain nombre de fonctions de référence, et pour quelques constructions permettant d'en obtenir suffisamment d'autres. C'est l'objet de la section suivante.

1.2 Fonction dérivée

Définition 2 : *On dit qu'une fonction f est* dérivable sur un intervalle I *si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on note f' sa* fonction dérivée.

Plutôt que d'étudier au cas par cas la dérivabilité, on va utiliser un tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles :

Ens. de définition	Fonction	Dérivée	Ens. de dérivabilité
$\mathbb{R}$	k (constante)	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathbb{R}^{*+}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^{*+}$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{*+}$

ainsi que quelques *règles de construction* : si u et v sont dérivables sur I, alors

- ku (k constante) est dérivable sur I, et $(ku)' = ku'$
- $u + v$ est dérivable sur I, et $(u+v)' = u' + v'$
- uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + uv'$.

Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors

- $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Par exemple,

- pour dériver la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$, on la considère comme somme de trois fonctions :
  - $u : x \mapsto 3x^2$, considérée comme produit de la fonction $x \mapsto x^2$ par la constante 3, donc de dérivée $u' : x \mapsto 3.\left(2.x^1\right) = 6x$,
  - $v : x \mapsto 4x$, considérée comme produit de la fonction $x \mapsto x$ par la constante 4, donc de dérivée $v' : x \mapsto 4.\left(1.x^0\right) = 4$,
  - $w : x \mapsto 5$, fonction constante de dérivée nulle.

  Ainsi, $f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 6x + 4 + 0 = 6x + 4$.
- pour dériver la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, on la considère comme quotient de

[2] ou mieux, demander à un mathématicien de faire pour nous !

- $u : x \mapsto 2x+3$, de dérivée $u'(x) = 2$,
- par $v : x \mapsto x+1$, de dérivée $v'(x) = 1$, et *ne s'annulant pas sur* $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Ainsi
$$g'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2.(x+1) - (2x+3).1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

1.3 Tangente, approximation affine

On obtient facilement l'équation de la tangente au point A d'abscisse a en exprimant le fait qu'elle passe par A, et que son coefficient directeur est $f'(a)$. Le plus simple est de retenir la formule :
$$T_a \,:\, y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

La fonction qui a x associe $f'(a)\,(x-a) + f(a)$ s'appelle *l'approximation affine de f en a*. La proximité de la courbe avec la tangente autour du point de contact montre que cette valeur est, pour x proche de a, très proche de $f(x)$. Elle est parfois utilisée pour trouver rapidement des valeurs approchées. Nous en verrons des exemples en TD.

2 Application de la dérivation à l'étude des variations des fonctions

2.1 Lien entre la dérivée et les variations d'une fonction

On a vu que, localement, la courbe d'une fonction et sa tangente était pratiquement confondues. Cela signifie en particulier qu'elles ont les mêmes variations. On en tire donc le théorème suivant :

Théorème 1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ sur I, sauf en quelques points de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I, sauf en quelques points de I, alors f est strictement décroissante sur I. ★

L'étude des variations d'une fonction f sur un intervalle I se ramène donc à l'étude du signe de f', et au découpage de I en sous-intervalles sur lesquels le signe de f' est constant.

Exemple 1 : Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction polynôme, et
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3\,(x-1)\,(x+1)$$

Cette factorisation permet de trouver le signe de $f'(x)$ en fonction de x, et d'en déduire les variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On verra en TD de nombreux autres exemples, certains impliquant plusieurs dérivées successives.

3 Plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude permettant d'étudier en détail à peu près n'importe quelle fonction :

1) Ensemble de définition.
2) Réduction éventuelle de l'ensemble d'étude, par parité, périodicité...
3) Ensemble de dérivabilité.
4) Calcul de la dérivée.
5) Étude du signe de la dérivée.
6) Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
7) Tableau de variations.
8) Études particulières : asymptotes, symétries...

3.1 Résolution d'équations

Une fonction dérivable sur un intervalle I est nécessairement continue sur cet intervalle. On peut donc utiliser le théorème suivant :

Théorème 2
Si f est dérivable sur $[a, b]$, alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit, si α est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \alpha$ a au moins une solution sur l'intervalle $[a, b]$. ★

En pratique, ce théorème s'utilise de la façon suivante : on cherche dans le tableau de variation les intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone, et sur lesquels la fonction change de signe, ce qui garantit l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$, et son unicité par stricte monotonie.

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, on remarque que l'équation $f(x) = 0$ a une solution sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, et la stricte monotonie et la dérivabilité de f sur $]-\infty; -1[$ garantit l'existence et l'unicité d'une autre solution.

Il n'est pas difficile de vérifier que $f(-2) = 0$, ce qui permet par exemple de compléter le tableau de signe de f :

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad 1 \quad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\ 0\ +0+$

4 Dérivation des fonctions composées

La dernière opération importante permettant de construire de nouvelles fonctions à partir des fonctions de référence est la *composition* : partant d'un réel x, on lui applique une première fonction f, puis on applique une deuxième fonction g *au résultat obtenu* :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

La fonction obtenu se note $g \circ f$, elle est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Pour pouvoir évaluer $g \circ f$ en x, il faut que f soit définie en x *et* que g soit définie en $f(x)$ (et non en x !). Cette remarque permet de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée.

Du point de vue de la dérivabilité, on doit retenir le théorème suivant :

Théorème 3
Soit f dérivable sur l'intervalle I, et g dérivable sur l'intervalle J. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

En abrégé : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. ★

Exemple 3 : Soit à étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

f est composée des fonctions $u : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, g dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $u(x)$ est strictement positif sur $]-\infty;-2[$ et $]-1;+\infty[$. Ainsi, f est dérivable sur chacun de ces deux intervalles, et

$$f'(x) = u'(x) . \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

5 Les fonctions exp et ln

5.1 La fonction exp

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est exp. Le tableau de variations de cette fonction est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient la formule de dérivation à retenir :

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Exemple 4 : La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^{x^2-3x}$ est $f'(x) = (2x-3)\, e^{x^2-3x}$.

5.2 La fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Le tableau de variations de cette fonction est donc :

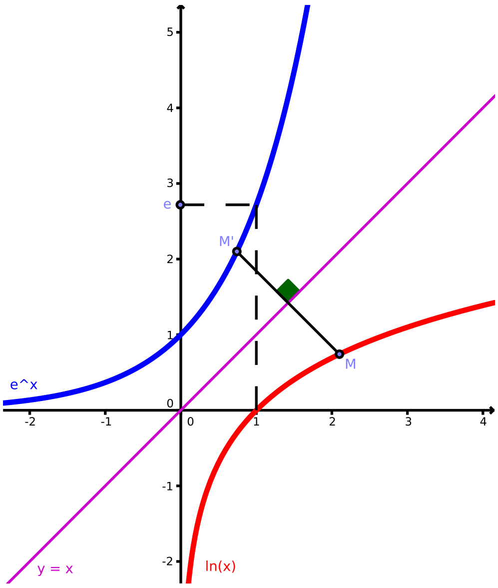
x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient la formule de dérivation à retenir :

$$(ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple 5 : La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = ln\left(x^2 - 3x\right)$ (définie sur $]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$) est $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$.

Rappelons que ces deux fonctions sont *réciproques* l'une de l'autre, ce qui se traduit graphiquement par le fait que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première diagonale).



6 Les fonctions trigonométriques

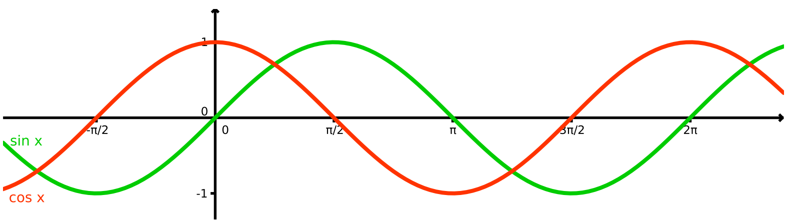
6.1 Les fonctions sin et cos

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, leurs dérivées sont respectivement cos et $-\sin$.

Ces fonctions sont périodiques de période 2π, sin est impaire et cos paire. Ceci permet de restreindre leur étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$		$-$		$-$	
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



6.2 La fonction tan

La fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur son ensemble de définition, réunion des intervalles de la forme $\left]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, k étant un entier quelconque. Elle est π-périodique, impaire, on peut donc restreindre son étude à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Sa dérivée est $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. tan est donc strictement croissante sur chacun des intervalles composant son ensemble de définition.