# Correction du DM n°2

**Exercice 1 : 43 p.16**
La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$.

1) Calculez $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.
2) Donnez le nombre de 0 en fonction de $n$ lorsque $n$ prend les valeurs 1, 2, …
3) (a) Énoncez la conjecture sous cette forme. Éventuellement, testez-là sur des exemples.
   (b) Prouvez que votre conjecture est vraie.

1) Voici les premières valeurs de $u_n$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 7 | 52 | 502 | 5002 | 50002 | 500002 |

2) Pour $n \geqslant 1$, $u_n$ s'écrit avec un 5, $n-1$ zéros et un 2. Pour $n = 0$, il y a "$-1$" zéro, et le 5 et le 2 se "combinent" en un 7.

3) (a) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : $u_n = 5 \times 10^n + 2$.
   (b) $u_0 = 7 = 5 \times 10^0 + 2$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Supposons alors $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n$.

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 \underset{\mathscr{P}_n}{=} 10\,(5 \times 10^n + 2) - 18 = 5 * 10^{n+1} + 20 - 18 = 5 * 10^{n+1} + 2$$

   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie, et par le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n$.

**Exercice 2 : 62 p.18**
Parfois, pour démontrer que la proposition $P_{n+1}$ est vraie, il n'est pas suffisant de supposer que la proposition $P_n$ est vraie. Il se peut que la démonstration nécessite le fait que $P_p$ est vraie pour un certain nombre d'indices inférieurs ou égaux à $n$. L'hypothèse de récurrence est alors « $P_p$ est vraie pour tout $p \leqslant n$ ». Dans la première étape, on vérifie la propriété aux premiers rangs, en accord avec le nombre de propositions nécessaires pour démontrer $P_{n+1}$ dans la deuxième étape.

A. La suite $(u_n)$ est définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
   1. Calculer $u_3$, $u_4$, $u_5$ et conjecturez l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

B. la suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = \dfrac{2}{5}$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Démontrez que pour tout naturel $n$, $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5}$.

A. 1. Calculons donc les premières valeurs de la suite $(u_n)$ :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

Il semblerait que $(u_n)$ soit la suite des entiers impairs.

2. Notons donc $\mathscr{P}_n$ l'assertion : $u_p = 2p - 1$ pour tout $p \leqslant n$.
   $u_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$ et $u_2 = 3 = 2 \times 2 - 1$, donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.
   Supposons alors $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n$, et démontrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie, i.e. que $u_p = 2p - 1$ pour tout $p \leqslant n+1$.
   $\mathscr{P}_n$ étant vraie, il nous reste à vérifier une seule égalité :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} = 2\,(2n-1) - (2n-3) = 2n+1 = 2\,(n+1) - 1$$

   Ainsi, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier $n$.

B. Notons cette fois $\mathscr{P}_n$ l'assertion : $u_p = \dfrac{2^p + 3^p}{5}$ pour tout $p \leqslant n$.
   $u_0 = \dfrac{2}{5} = \dfrac{2^0 + 3^0}{5}$, et $u_1 = 1 = \dfrac{2^1 + 3^1}{5}$, $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} &\underset{\mathscr{P}_n}{=} 5\frac{2^n + 3^n}{5} - 6\frac{2^{n-1} + 3^{n-1}}{5} \\ &= \frac{2^{n-1}\,(10-6) + 3^{n-1}\,(15-6)}{5} = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5} \end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie, et $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 3 : 65 p.18**
La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 2}$.
On pose, pour tout entier $n$, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 4}$.

1) Démontrez que la suite $(v_n)$ est géométrique.
2) Exprimez $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

1) Calculons $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1-4}} = \frac{\frac{u_n+4}{u_n-2} + 1}{\frac{u_n+4}{u_n-2} - 4} = \frac{2u_n + 2}{-3u_n + 12} = -\frac{2}{3}\frac{u_n + 1}{u_n - 4} = -\frac{2}{3}v_n$$

   Ainsi, $(v_n)$ est géométrique, de raison $-\dfrac{2}{3}$, et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 + 1}{u_0 - 4} = -\dfrac{2}{3}$.

2) Ainsi, pour tout entier $n$, $v_n = v_0 \times r^n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.
   Or, de la définition de $v_n$, on tire successivement : $(u_n - 4)\,v_n = u_n + 1$, puis $u_n\,(v_n - 1) = 4v_n + 1$, et enfin $u_n = \dfrac{4v_n + 1}{v_n - 1}$, $v_n$ étant différent de 1 pour tout $n$.
   Ainsi, $u_n = \dfrac{4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}$.