DS n°1 : complexes, récurrence, dérivation

Exercice n°1 : complexes

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : $Z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z - \sqrt{3} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnues z :

   (a) $z + \dfrac{1}{z} = 1$;

   (b) $z + \dfrac{1}{z} = -\sqrt{3}$.

3) Soit P le polynôme défini, pour tout complexe z, par :

$$P(z) = z^4 + \left(\sqrt{3}-1\right) z^3 + \left(2-\sqrt{3}\right) z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) z + 1$$

   (a) Vérifier que l'équation $P(z) = 0$ équivaut à : $\dfrac{P(z)}{z^2} = 0$.

   (b) En posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$, exprimer $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z. En déduire les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice n°2 : récurrences

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

   (b) i. Calculer u_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

   ii. Quelle conjecture peut-on émettre quant-à la valeur de u_n en fonction de n ?

   iii. Démontrer cette conjecture.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

   (a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ pour $x \neq 2$.

   (b) Démontrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x \neq 2$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en x peut s'écrire :

$$f^{(n)}(x) = 3(-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$$

Exercice n°3 : étude d'une fonction

1) Soit P définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$.

   (a) Étudier les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$.

   (b) Dresser le tableau de variations de P sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $P(x) = 0$, puis le signe de $P(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Montrer que $f'(x)$ est de même signe que $P(x)$.

   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

DS n°1 : complexes, récurrence, dérivation

Exercice n°1 : complexes

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : $Z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z - \sqrt{3} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnues z :

   (a) $z + \dfrac{1}{z} = 1$;

   (b) $z + \dfrac{1}{z} = -\sqrt{3}$.

3) Soit P le polynôme défini, pour tout complexe z, par :

$$P(z) = z^4 + \left(\sqrt{3}-1\right) z^3 + \left(2-\sqrt{3}\right) z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) z + 1$$

   (a) Vérifier que l'équation $P(z) = 0$ équivaut à : $\dfrac{P(z)}{z^2} = 0$.

   (b) En posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$, exprimer $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z. En déduire les solutions de $P(z) = 0$.

Exercice n°2 : récurrences

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

   (b) i. Calculer u_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

   ii. Quelle conjecture peut-on émettre quant-à la valeur de u_n en fonction de n ?

   iii. Démontrer cette conjecture.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

   (a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ pour $x \neq 2$.

   (b) Démontrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x \neq 2$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en x peut s'écrire :

$$f^{(n)}(x) = 3(-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$$

Exercice n°3 : étude d'une fonction

1) Soit P définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$.

   (a) Étudier les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$.

   (b) Dresser le tableau de variations de P sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $P(x) = 0$, puis le signe de $P(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Montrer que $f'(x)$ est de même signe que $P(x)$.

   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.