Corrigé du DS n°1 : complexes, récurrence, dérivation

Exercice n°1 : complexes

1) Le discriminant de l'équation est[1]

$$\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

donc les solutions de l'équations $Z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z - \sqrt{3} = 0$ son

$$Z_1 = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right) - \left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right) + \left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 1$$

2) Ces équations se résolvent en constatant que 0 ne peut être solution, et en multipliant les deux membres par z :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \iff z^2 + 1 = z \iff \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3} \iff z^2 + 1 = \sqrt{3}z \iff \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \iff z = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$$

3) (a) 0 n'est pas solution de l'équation $P(z) = 0$, donc on peut diviser les deux membres par z^2, pour obtenir l'équation équivalente $\dfrac{P(z)}{z^2} = 0$.

(b) Posons donc $Z = z + \dfrac{1}{z}$. On a $Z^2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{z^2} &= \frac{z^4 + \left(\sqrt{3}-1\right) z^3 + \left(2-\sqrt{3}\right) z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) z + 1}{z^2} \\
&= z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) z + \left(2-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-1\right) \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \\
&= Z^2 - 2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z + \left(2-\sqrt{3}\right) = Z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

On reconnaît l'équation étudiée au début de l'exercice. On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 &\iff \frac{P(z)}{z^2} = 0 \\
&\iff Z^2 + \left(\sqrt{3}-1\right) Z - \sqrt{3} = 0 \\
&\iff \left(Z = -\sqrt{3} \text{ ou } Z = 1\right) \\
&\iff \left(z + \frac{1}{z} = -\sqrt{3} \text{ ou } z + \frac{1}{z} = 1\right) \\
&\iff z \in \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{3}-i}{2}; \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Exercice n°2 : récurrences

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

(a) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : "pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$".

- $u_0 = 1 > 0^2$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie ;
- supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier n ; alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \underset{\mathscr{P}_n}{>} n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

En conclusion, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

[1]On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

(b) i. Observons le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	4	9	16	25	36

ii. Il semble que la deuxième ligne soit la liste des carrés des premiers entiers, décalée d'un rang. On peut donc conjecturer que $u_n = (n+1)^2$.

iii. Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : "$u_n = (n+1)^2$".

- $u_0 = 1 = (0+1)^2$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie ;
- supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier n ; alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \underset{\mathscr{P}_n}{=} (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

En conclusion, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2) (a) À partir de

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1).1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2} = -3(x-2)^{-2}$$

on tire facilement

$$f''(x) = (-3).(-2)(x-2)^{-3} = 6(x-2)^{-3} \quad \text{et} \quad f'''(x) = 6.(-3)(x-2)^{-4} = 18(x-2)^{-4}$$

(b) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : "$f^{(n)}(x) = 3(-1)^n \dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}}$".

- D'après ce qui précède, $\mathscr{P}_1$ est vraie[2], puisque

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} = 3(-1)^1 \frac{1!}{(x-2)^{1+1}}$$

- supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel non nul n ; alors $f^{(n)}(x) = 3(-1)^n n!(x-2)^{-(n+1)}$, donc

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) \underset{\mathscr{P}_n}{=} 3(-1)^n n!(-(n+1))(x-2)^{-(n+2)} = 3(-1)^{n+1}(n+1)!(x-2)^{-(n+2)}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.

En conclusion, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°3 : étude d'une fonction

1) (a) Par le théorème sur la limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$, on trouve immédiatement :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$$

(b) P est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $P'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)$, ce qui permet de dresser le tableau de variations de P :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(c) La fonction P reste strictement positive sur $]-\infty; 0]$, son minimum étant $\frac{7}{4}$ sur cet intervalle.
Elle est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, y prend des valeurs positives (en 0) et négatives (pour x suffisamment grand, sa limite en $+\infty$ étant $-\infty$), elle s'annule donc une fois et une seule sur cet intervalle. Nous appellerons cette unique racine α.
Le tableau de signe de P est donc :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	

[2] par contre, $\mathscr{P}_0$ n'est visiblement pas vraie, il faut modifier l'hypothèse de récurrence pour qu'elle puisse fonctionner aussi pour $n = 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

(a) Par le théorème sur les limites en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle, on trouve :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et prenant la valeur -1 en -1, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^3 + 1 = 0^- \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} 2x + 1 = -1 \end{array}\right\} \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

et de même $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

(b) f est dérivable sur son ensemble de définition, et

$$f'(x) = \frac{2\left(x^3+1\right) - (2x+1)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{P(x)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Le dénominateur de cette fraction est un carré, donc positif, le signe de $f'(x)$ est donc le signe de son numérateur, soit celui de $P(x)$ (et ça tombe bien, on vient justement de l'étudier !).

(c) Le tableau de variations de f sur son ensemble de définition, est donc :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Pour les curieux, voici pour confirmation la courbe représentative de la fonction f comme tracée par `Geogebra` :