DS n°2 : récurrence, dérivation, combinatoire, géométrie plane

Exercice n°1 : récurrence

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2) En constatant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$, retrouver le résultat précédent.

Exercice n°2 : étude d'une fonction et applications

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-2}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) (a) Montrer que pour tout $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$$

En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.

(b) (*Question facultative*) Montrer que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = x + 3 + \dfrac{6}{x-2}$, et en déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe de f.

(c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 0,5cm.

2) Utiliser l'étude précédente pour déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de racines de l'équation $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.

3) (*Question bonus*) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ de l'équation :

$$\cos(2u) + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0$$

(on rappelle que $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$.

Exercice n°3 : combinatoire

D'un jeu de 52 cartes, on tire (simultanément) 5 cartes.

1) Quel est le nombre total de "mains" que l'on peut obtenir ?

2) Combien de ces mains contiennent exactement 4 As ?

3) Combien de mains contiennent exactement 3 As et 2 Rois ?

4) Combien de mains contiennent au moins 3 rois ?

5) Combien de mains contiennent au moins un As ?

Exercice n°4 : géométrie plane

Soit A et B deux points distincts du plan, et I le milieu du segment $[AB]$. On note d la distance AB. Dans tout cet exercice, k est un réel fixé.

1) Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H de (AB), la position du point H étant à préciser.

2) (a) Montrer que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$.

(b) En déduire le lieu des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

3) Par une méthode similaire, discuter le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$, selon la valeur de k.