

DS n°3 : complexes, exponentielle, géométrie dans l'espace

Exercice n°1 : complexes

1) Pour tout nombre complexe Z on pose : $P(Z) = Z^4 - 1$.

(a) Factoriser $P(Z)$.

(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$.

(c) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

2) (a) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5cm). Placer les points A , B et C d'affixes :

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i, \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

(b) Démontrer que les points O , A , B et C sont sur un cercle que l'on définira.

Exercice n°2 : exponentielle

1) Question de cours

La fonction exponentielle est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = y$, telle que $\exp(0) = 1$.

(a) Montrer que pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(Indication : introduire la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$.)

(b) Démontrer que pour tous réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$.

(Indication : introduire la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x+y) \cdot \exp(-x)$.)

(c) En déduire que, pour tout réel x , $(\exp(x))^2 = \exp(2x)$.

2) Applications

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$e^{2x} + e^x - 2 > 0$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} e^{x+1} - e^{-y} = 0 \\ e^x + e^{-y-1} = 2 \end{cases}$$

(on pourra poser $X = e^x$ et $Y = e^{-y}$).

Exercice n°3 : géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(0; 0; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1; 0; -1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ passant par $B(2; 0; 4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(0; 1; 1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$, de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

- 1) On considère un point M appartenant à $\mathcal{D}$ et un point M' appartenant à $\mathcal{D}'$ définis par $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$, où a et b sont des nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M , de M' , puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b .

- 2) Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ si et seulement si le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$$

- 3) Résoudre ce système.

En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M' , que nous noterons ici H et H' , tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Montrer que $HH' = \sqrt{3}$.

- 4) On considère un point M quelconque de la droite $\mathcal{D}$ et un point M' quelconque de la droite $\mathcal{D}'$.

- (a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1), démontrer que

$$MM'^2 = (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3$$

- (b) En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' en H' .