Corrigé du DS n°3 : complexes, exponentielle, géométrie dans l'espace

Exercice n°1 : complexes

1) (a) $P(Z) = Z^4 - 1 = \left(Z^2 - 1\right)\left(Z^2 + 1\right) = (Z-1)(Z+1)(Z-i)(Z+i)$

(b) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$ sont donc ± 1 et $\pm i$.

(c) Posant $Z = \dfrac{2z+1}{z-1}$, l'équation se réécrit $Z^4 = 1$. Ainsi Z est l'une des solutions trouvées ci-dessus. Or, si λ est un réel quelconque :

$$\frac{2z+1}{z-1} = \lambda \iff 2z+1 = \lambda(z-1) \iff (\lambda - 2)z = \lambda + 1$$

Cette équation a donc une unique solution $z = \dfrac{\lambda+1}{\lambda-2}$ si $\lambda \neq 2$, et pas de solution pour $\lambda = 2$. Si l'on applique ce résultat en remplaçant λ par l'une des quatre solutions trouvées précédemment, on obtient

- si $\lambda = 1$, alors $z = -2$,
- si $\lambda = -1$, alors $z = 0$,
- si $\lambda = i$, alors $z = \dfrac{i+1}{i-2} = \dfrac{(i+1)(-i-2)}{(i-2)(-i-2)} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$,
- si $\lambda = -i$, alors $z = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$.

Un petit coup d'oeil sur la deuxième partie permet de se rendre compte qu'on doit être sur la bonne piste !

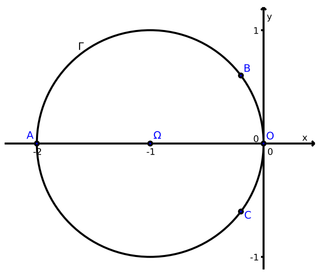
2) (a) Voir la figure plus bas.

(b) La figure présente une symétrie d'axe l'axe des abscisses, on va donc chercher un cercle de centre sur cet axe. Ce centre ne peut être que le milieu Ω de $[AO]$, d'affixe $\omega = \dfrac{-2+0}{2} = -1$.

On a alors $\Omega A = \Omega O = 1$,

$$\Omega B = |b - \omega| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

et de même $\Omega C = 1$. Les quatre points se trouvent donc sur le cercle de centre Ω et de rayon 1.



Exercice n°2 : exponentielle

1) **Question de cours**

(a) Soit donc g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x) . \exp(-x)$. Par les théorèmes usuels (composition et produit), g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = \exp(x) . \exp(-x) + \exp(x) . (-\exp(-x)) = 0$$

donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \exp(x) . \exp(-x) = g(0) = \exp(0) . \exp(-0) = 1$$

d'où $\exp(x) \neq 0$, et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(b) Fixons $y \in \mathbb{R}$. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x+y).\exp(-x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$h'(x) = (1.\exp(x+y)).\exp(-x) + \exp(x+y).(-\exp(-x)) = 0$$

donc h est elle aussi constante sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \exp(x+y).\exp(-x) = h(0) = \exp(y).\exp(-0) = \exp(y)$$

d'où finalement : pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(c) En appliquant la relation précédente à $x = y$, on obtient bien $(\exp(x))^2 = \exp(2x)$.

2) **Applications**

(a) En posant $X = e^x$, l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 > 0$ se réécrit $Z^2 + Z - 2 > 0$, soit $(Z-1)(Z+2) > 0$. On sait que ceci équivaut à

- $Z < -2$, soit $e^x < -2$, qui n'a pas de solution puisque $e^x > 0$ pour tout x,
- ou $Z > 1$, soit $e^x > 1 = e^0$, soit encore $x > 0$.

L'ensemble des solution de l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 > 0$ est donc $]0;+\infty[$.

(b) Posons maintenant $X = e^x$ et $Y = e^{-y}$.

$$\left\{\begin{array}{l} e^{x+1} - e^{-y} = 0 \\ e^x + e^{-y-1} = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e^1.e^x - e^{-y} = 0 \\ e^x + e^{-1}e^{y-1} = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} eX - Y = 0 \\ X + Y/e = 2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} X = 1 \\ Y = e \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e^x = 1 \\ e^{-y} = e \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

$(0,-1)$ est donc l'unique couple solution de ce système.

Exercice n°3 : géométrie dans l'espace

1) On obtient dans cette question des *représentations paramétriques* des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$:

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{l} x - 0 = a.1 \\ y - 0 = a.0 \\ z - 3 = a.(-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = a \\ y = 0 \\ z = 3 - a \end{array}\right.$$

et de même

$$\overrightarrow{BM'} = b\vec{v} \iff \left\{\begin{array}{l} x' = 2 \\ y' = b \\ z' = 4 + b \end{array}\right.$$

Ainsi, les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont $(2-a, b, 1+a+b)$.

2) (MM') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{v} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (2-a).1 + b.0 + (1+a+b).(-1) = 0 \\ (2-a).0 + b.1 + (1+a+b).1 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{array}\right.$$

3) On trouve facilement, par n'importe quelle méthode $a = 1$ et $b = -1$.
Ainsi, en reportant dans les coordonnées de M et M' trouvées plus haut : $H(1,0,2)$ et $H'(2,-1,3)$, et

$$HH' = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

4) (a) En reprenant les coordonnées trouvées plus haut, on trouve :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (2-a)^2 + b^2 + (1+a+b)^2 = 4 - 4a + a^2 + b^2 + 1 + a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2ab \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3 &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 + 3 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5 \end{aligned}$$

On a donc bien $MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3$.

(b) La distance MM' ne peut être inférieure à $\sqrt{3}$ d'après la question précédente, et elle ne peut être égale à $\sqrt{3}$ que si a et b vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-1=0 \\ b+1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

On en déduit bien que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' en H', et seulement en ces points.