DS n°3 : complexes, exponentielle

Les trois exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice.

Exercice n°1 (8 points) : exponentielle

A. Étude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1) Étudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α, et montrer que $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$.
4) Déduire de ce qui précède le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

A. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)\left(1 - e^{-x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2) Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3) Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   En déduire le tableau de variations de f.
4) (a) À l'aide de la relation $g(\alpha) = 0$, démontrer l'égalité $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$.
   (c) En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la première partie, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5) Démontrer que la droite D, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
6) Tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm).

Exercice n°2 (4 points) : complexes et trigonométrie

On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Écrire la forme algébrique de $z_1 z_2$.
2) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle. En déduire la forme exponentielle de $z_1 z_2$.
3) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice n°3 (8 points) : complexes et géométrie

Dans tout cet exercice, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Restitution organisée de connaissances**

   Soit M, N et P trois points d'affixes respectives m, n et p. On suppose connues les propriétés :

$$|n-m| = MN \quad \text{et} \quad \arg(n-m) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right) \ (\text{si } M \neq N)$$

   (a) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right)$.

   (b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2) On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i.

   On considère l'application f qui, à tout point M différent de A et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+1}{z-2i}$.

   (a) i. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice (unité graphique 4cm).

   ii. Déterminer l'affixe du point C', image de C par f, et le placer sur la figure.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?

   iii. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on appellera C'', et que l'on ajoutera sur la figure.
   Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

   (b) En écrivant $z' = \dfrac{-1-z}{2i-z}$, donner une interprétation géométrique du module et de l'argument de z' (lorsque celui-ci existe).

   (c) Déterminer, en utilisant la question précédente, les ensembles suivants :

   i. l'ensemble E_0 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif ;

   ii. l'ensemble E_1 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul ;

   iii. l'ensemble E_2 des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.