Corrigé du DS n°4 : complexes, exponentielle

Exercice n°1 : exponentielle

A. Étude d'une fonction auxiliaire

1) Pas d'indétermination dans les calculs de limites, les théorèmes usuels suffisent :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-7=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x+2x-7=-\infty$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-7=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x+2x-7=+\infty$.
2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x)=2e^x+2$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$, e^x ne prenant que des valeurs strictement positives. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $g(x)=0$ a au plus une solution sur $\mathbb{R}$.
   D'autre part, $g(0)=-6$ et $g(1)=2e-5>0$ (en utilisant le fait que $e\approx 2{,}718$), et la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit l'existence (et l'unicité, d'après ce qui précède) d'une solution α à l'équation $g(x)=0$.
   On sait déjà que $0<\alpha<1$. De $f(0{,}9)<0$, on tire[1] $0{,}9<\alpha<1{,}0$.
   De proche en proche, on arrive à $f(0{,}94)<0<f(0{,}941)$, donc $0{,}940<\alpha<0{,}941$. On a donc une valeur approchée à 10^{-3} près de α.
4) La relecture du tableau de variations ci-dessus permet d'obtenir le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

B. Étude d'une fonction

1) $f(x)$ se présente comme un produit. On a

$$2x-5>0 \iff x>\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad 1-e^{-x}>0 \iff 1=e^0>e^{-x} \iff 0>-x \iff x>0$$

   D'où le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Encore une fois, inutile d'invoquer des théorèmes compliqués pour trouver les limites de f en $\pm\infty$, sauf peut-être le théorème de composition pour trouver les limites e^{-x} :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
3) Utilisons l'indication fournie :

$$f'(x)=2\left(1-e^{-x}\right)+(2x-5)\,e^{-x}=e^{-x}\left(2e^x-2+2x-5\right)=e^{-x}\left(2e^x+2x-7\right)$$

[1] On écrit 1,0 plutôt que 1 pour indiquer que la précision des calculs est au dixième près (tous les physiciens font de même !).

$e^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) (a) De $g(\alpha) = 0$, on déduit :

$$2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0 \iff e^{\alpha} = \frac{7-2\alpha}{2} \iff e^{-\alpha} = \frac{2}{7-2\alpha}$$

On a donc

$$f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - e^{-\alpha}\right) = (2\alpha - 5)\frac{7-2\alpha-2}{7-2\alpha} = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

(b) h est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$, et

$$h'(x) = \frac{2(2x-5)(2x-7) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = \frac{(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

Sur l'intervalle d'étude, h' ne prend que des valeurs positives, donc h y est strictement croissante.

(c) En composant l'inégalité $0{,}940 < \alpha < 0{,}941$ par la fonction strictement croissante h, on obtient un encadrement de $f(\alpha)$:

$$-1{,}91 < -1{,}90125 \approx h(\alpha) = f(\alpha) \approx -1{,}89955 < -1{,}89$$

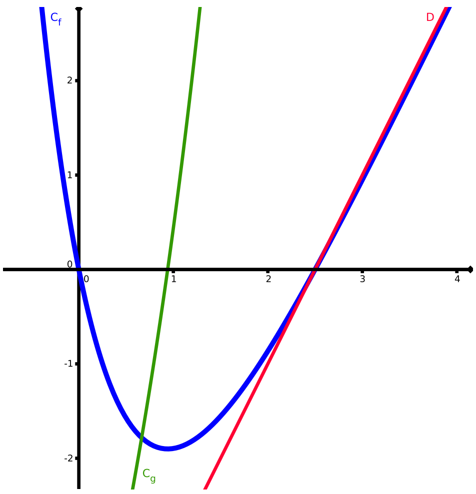
$-1{,}90$ est donc une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(\alpha)$ (et même à 5.10^{-3} près !).

5) $f(x) - (2x-5) = (2x-5)\left(1-e^{-x}\right) - (2x-5) = -(2x-5)e^{-x}$. Par croissance comparée, on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty} -2xe^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} 5e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x-5) = 0$$

Ainsi, la droite D d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. De plus, $f(x) - (2x-5)$ est du signe de $2x-5$, donc la courbe de f est au dessus de D sur $]5/2; +\infty[$, en dessous sur $]-\infty; 5/2[$.

6) Voici pour finir la courbe représentative de f, ainsi que celle de g, l'asymptote D et la tangente horizontale.



Exercice n°2 (4 points) : complexes et trigonométrie

On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) $z_1 z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(1-i) = 1 + \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

2) $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, donc $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, donc $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3) On a donc :

$$1+\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)=z_1z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

d'où

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\quad\text{et}\quad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice n°3 (8 points) : complexes et géométrie

1) **Restitution organisée de connaissances**

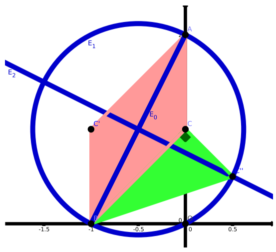
(a) D'après les présupposés, on a :

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right)=\arg(p-m)-\arg(n-m)=\left(\vec{u},\overrightarrow{MP}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right)$$

ce qui est bien, d'après la relation de Chasles, égal à $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right)$.

(b) $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|=\dfrac{|p-m|}{|n-m|}=\dfrac{MP}{MN}$ mesure le quotient des distances MP et MN.

2) (a) i. Voici la figure complétée :



ii. L'affixe de C', image de C par f, est $c'=f(i)=\dfrac{i+1}{i-2i}=\dfrac{i+1}{-i}=-1+i$.
On constate sur la figure que $ACBC'$ semble être un parallélogramme. Confirmons-le : l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est $c-a=i-2i=-i$, celle de $\overrightarrow{C'B}$ est $b-c'=-1-(-1+i)=-i$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'B}$ sont bien égaux.

iii. L'affixe c'' d'un antécédent de C par f vérifie :

$$f(c'')=c\iff\frac{c''+1}{c''-2i}=i\iff c''+1=ic''+2\iff c''(1-i)=1\iff c''=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$$

Cette équation a donc bien une unique solution.
Sur la figure, le triangle BCC'' semble rectangle en C. Confirmons-le :

$$\frac{c''-c}{b-c}=\frac{\frac{1+i}{2}-i}{-1-i}=\frac{1-i}{2(1+i)}=\frac{(1-i)^2}{4}=-\frac{i}{2}$$

est imaginaire pur, donc $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CC''}\right)=\arg\left(\dfrac{c''-c}{b-c}\right)=\dfrac{\pi}{2}\,(\operatorname{mod}\pi)$, et le triangle est bien rectangle.

(b) En multipliant numérateur et dénominateur de $f(z)$ par -1, on obtient bien $z'=\dfrac{-1-z}{2i-z}$, ce qui peut s'interpréter, d'après la première partie, en :

- $\arg(z')=\arg\left(\dfrac{-1-z}{2i-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$
- $|z'|=\dfrac{MB}{MA}$

lorsque M est distinct de A et de B, bien entendu.

(c) i. z' est réel strictement négatif si et seulement si l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$ est congru à π modulo 2π, soit si M appartient au segment (ouvert) $]AB[$, qui est donc l'ensemble E_0 cherché.

ii. z' est imaginaire pur non nul si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$ est congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, soit si le triangle AMB est rectangle en M. Ainsi E_1 est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

iii. $f(M)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si $|z'|=1$, soit si $\dfrac{MA}{MB}=1$. L'ensemble E_2 est donc la médiatrice du segment $[AB]$.