

DS n°5 : continuité, complexes, probabilités

Les trois exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice.

Exercice n°1 (7 points) : étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } g(0) = 0$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

- 1) Étudier la parité de g .
- 2) Montrer que g est continue en 0.
- 3) Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.

La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement la réponse.

- 4) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 5) Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
- 6) Tracer la courbe \mathcal{C} ainsi que tous les éléments étudiés.

Exercice n°2 (7 points) : complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) (a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$.
- (b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

- 2) Soit M , A et B les points d'affixes respectives z , 1 et 2.

- (a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
- (b) Retrouver géométriquement la solution de (2).

- 3) (a) Soit n un entier naturel non nul. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution dans \mathbb{C} de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$ a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

- (b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

Exercice n°3 (7 points) : probabilités

Rapid le lièvre et Dosman la tortue jouent au jeu suivant. Un dé est lancé. Si celui-ci donne 6, le lièvre gagne. S'il tombe sur un autre nombre, la tortue avance d'une case. Pour que la tortue gagne, elle doit avancer de n cases (n entier naturel non nul).

Les lancers se poursuivent jusqu'à ce que l'un des deux joueurs soit gagnant.

On note $P_n(L)$ (respectivement $P_n(T)$) la probabilité que le lièvre (respectivement la tortue) gagne.

Partie A : Dosman propose de prendre $n = 4$.

- 1) (a) Conjecture : qui du lièvre ou de la tortue paraît favorisé ?
(b) Calculer $P_4(T)$ et en déduire $P_4(L)$. À qui la règle du jeu profite-t-elle ?
- 2) On désigne par X la variable aléatoire associant à une partie le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur.
(a) Déterminer la loi de probabilité de X .
(b) Combien de lancers en moyenne nécessitera une partie ?
- 3) (*Cette question est facultative, elle fait intervenir la dernière partie du cours vue cette semaine*)
Dix parties sont jouées, indépendamment et dans ces mêmes conditions.
(a) Quelle est la probabilité que la tortue gagne 5 fois exactement ?
(b) Combien de parties la tortue peut-elle espérer gagner à ce jeu ?

Partie B : la valeur de n n'est plus fixée .

- 1) Calculer $P_n(T)$.
- 2) Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.