Corrigé du DS n°5 : continuité, complexes, probabilités

Exercice n°1 : étude d'une fonction

1) g est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)^2}-1}{-x} = -\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = -g(x)$$

donc g est impaire. On l'étudiera donc sur $[0;+\infty[$, puis on terminera le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ par symétrie par rapport à l'origine.

2) Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ existe, et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x\neq 0}} g(x) = g(0)$. Or, pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

Donc g est bien continue[1]

3) Soit $x > 0$. Le calcul précédent permet d'écrire :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi, g est dérivable à droite (et donc aussi à gauche) en 0, $g'(0) = \dfrac{1}{2}$, ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en 0 de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

4) Soit $x > 0$. On a :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)}{x} = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

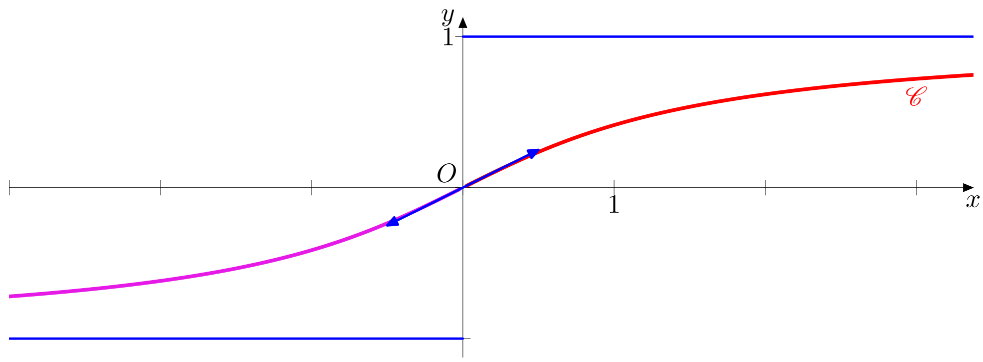
Par symétrie, on peut prévoir que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$[2].

5) Calculons $g'(x)$ pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.x - \left(\sqrt{x^2+1}-1\right).1}{x^2} = \frac{\frac{x^2-(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

Comme $\sqrt{1+x^2} > 1$, on en déduit que $g'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$, donc que g y est strictement croissante.

6) Voici pour terminer la courbe, ses deux asymptotes et sa tangente à l'origine :



[1] Ce qu'on a en fait démontré est que g est continue *à droite* en 0, n'ayant étudié que la limite à droite. La parité de g permet alors d'en déduire que la limite à gauche est identique, et donc que g est bien continue en 0. On remarquera au passage qu'une fonction impaire ne peut être continue en 0 que si elle y prend la valeur 0 (condition nécessaire, mais bien entendu pas suffisante !).

[2] ce que le calcul précédent ne semble pas permettre de retrouver ; la solution est simple quand on n'oublie pas d'y réfléchir un instant : si $x < 0$, $\sqrt{x^2}$ n'est pas égal à x, mais à $-x$!

Exercice n°2 : complexes

1) (a) Après avoir constaté que 1 ne peut être solution de l'équation (1), on multiplie de part et d'autre par $z-1$ pour obtenir :

$$\frac{z-2}{z-1}=z \iff z-2=z\,(z-1) \iff z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff z=1\pm i$$

Les deux solutions de cette équations sont donc $1+i$ et $1-i$. Ce sont les *points fixes* de l'application $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\dfrac{z-2}{z-1}$.

(b) De la même façon :

$$(2) \iff z-2=i\,(z-1) \iff z\,(1-i)=2-i \iff z=\frac{2-i}{1-i}=\frac{(2-i)\,(1+i)}{(1-i)\,(1+i)}=\frac{3+i}{2}$$

2) (a) D'après le cours : $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=\dfrac{MA}{MB}$ et $\arg\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)=\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)(\bmod 2\pi)$.

(b) Dire que z est solution de (2) revient donc à dire d'une part que $\dfrac{MA}{MB}=|i|=1$, donc $MA=MB$, d'autre part que $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}(\bmod 2\pi)$.

Le point M d'affixe z est donc d'une part sur la médiatrice du segment $[AB]$, d'autre part sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$ au dessus de l'axe des abscisses (l'autre demi-cercle correspondant à $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\arg(i)=-\dfrac{\pi}{2}(\bmod 2\pi)$).

3) (a) Si z est solution de l'équation $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n=i$, alors en particulier $\left|\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n\right|=|i|=1$, soit encore $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|^n=1$. Ainsi, si M est le point d'affixe z, $MA=MB$, donc M se trouve sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Or cette médiatrice a justement pour équation $x=\dfrac{3}{2}$, ce qui explique pourquoi les éventuelles solutions de l'équation $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n=i$ ont toutes pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

(b) D'après ce qui précède, une solution de l'équation 3 ne peut être que de la forme $\dfrac{3}{2}+iy$, où $y\in\mathbb{R}$. Cette constatation devrait simplifier notre travail :

$$\left(\frac{\frac{3}{2}+iy-2}{\frac{3}{2}+iy-1}\right)^2=i \iff \left(\frac{-1+2iy}{1+2iy}\right)^2=i \iff (-1+2iy)^2=i\,(1+2iy)^2 \iff 1-4y^2-4iy=i\left(1-4y^2\right)-4y$$

À ce stade, on doit identifier les parties réelles et imaginaires des deux cotés de l'égalité, pour former deux équations vérifiées par y. On constate que ce sont les deux mêmes, ce qui est plutôt rassurant.

$$1-4y^2=-4y \iff 4y^2-4y-1=0 \iff (2y-1)^2-2=0 \iff y=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$$

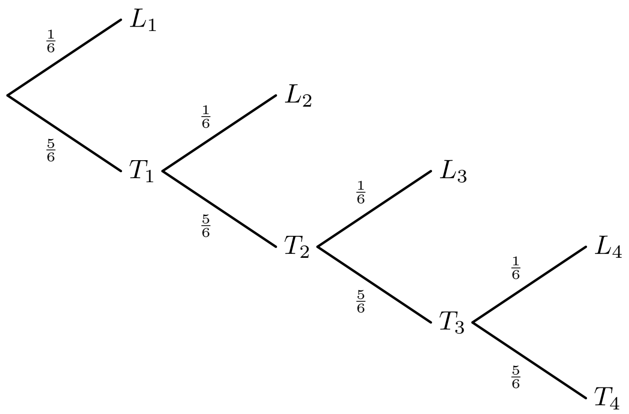
Les deux solutions de l'équation (3) sont donc $\dfrac{3}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{3}{2}+i\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°3 (7 points) : probabilités

Partie A : Dosman propose de prendre $n = 4$.

1) (a) Franchement, bien malin qui se sent capable de répondre à une telle question. On verra d'ailleurs par la suite que la réponse est loin d'être évidente !

   (b) Voici l'arbre permettant de répondre aux questions de cette partie. Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, L_i (resp. T_i) désigne l'événement "le lièvre resp. la tortue) gagne le lancer numéro i".



X	P_4
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{5}{6^2}$
3	$\frac{5^2}{6^3}$
4	$\frac{5^3}{6^4}$
1	$\frac{5^4}{6^4}$

   On déduit de cet arbre que $P_4(T) = P_4(T_4) = \frac{5^4}{6^4}$, d'où $P_4(L) = 1 - P_4(T) = 1 - \frac{5^4}{6^4}$.
   À la calculette, on lit $P_4(L) \approx 0{,}518$, donc le jeu semble légèrement favorable au lièvre.

2) (a) L'arbre précédent permet d'obtenir la loi de X :

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^3}$

   (b) Le nombre moyen de lancers d'une partie n'est autre que l'espérance de la variable aléatoire X, soit :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} k.P(X = k) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{6^2} + 3 \times \frac{5^2}{6^3} + 4 \times \frac{5^3}{6^3} = \frac{671}{216}$$

   Ainsi, en moyenne, une partie nécessite un peu plus de 3 lancers.

3) Nous sommes ici en présence d'une expérience de Bernoulli. Un succès représente une victoire de la tortue, donc $P(S) = \dfrac{5^4}{6^4}$. Si Y est la variable aléatoire comptant le nombre de succès de la tortue au cours des 10 parties, Y suit une loi binomiale de paramètres 10 et $p = P(S)$. Ainsi :

   (a) la probabilité que la tortue gagne 5 fois exactement est $P(Y = 5) = \dbinom{10}{5} p^5 (1-p)^5 \approx 0{,}245$: la tortue a un peu moins de 25% de chances de gagner exactement 5 parties ;

   (b) le nombre de parties que la tortue peut espérer gagner est l'espérance de la variable Y ; le cours nous dit que cette espérance est $10p \approx 4{,}82$.

Partie B : la valeur de n n'est plus fixée .

1) En reprenant le raisonnement de la première partie, on voit facilement que $P_n(T) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

2) La suite définissant $P_n(T)$ est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{5}{6}$, inférieure à 1. On sait qu'elle est décroissante, de limite nulle, donc il suffit de trouver la première valeur de n pour laquelle $P_n(T) < \dfrac{1}{2}$.
On voit à la calculette que cette valeur est 4, donc le jeu est favorable à la tortue pour les valeurs 1, 2 et 3 de n. Ensuite, il est favorable au lièvre.

n	1	2	3	4	5	6
$P_n(T)$	83%	69%	58%	48%	40%	33%