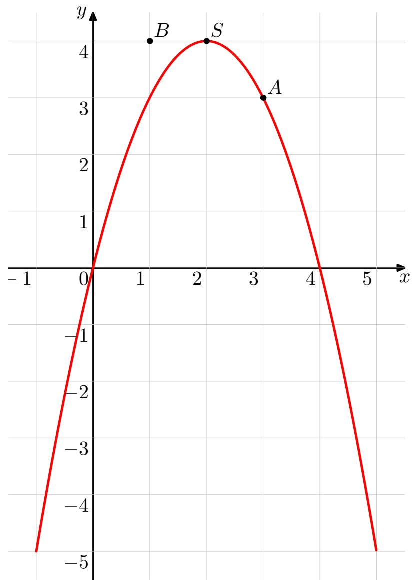
Évaluation : dérivation

Exercice 1 (6 points)

f est la fonction définie sur $[-1;5]$ dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure ci-contre.



1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

2) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $S(2;4)$ une tangente horizontale. En déduire le nombre $f'(2)$.

3) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $A(3;3)$ une tangente T et que $f'(3) = -2$. Donner une équation le la tangente T.

4) Soit B le point de coordonnées $(1;4)$. On admet que la droite (OB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O. Déterminer $f'(0)$.

5) Dans cette question, on admet que pour tout x dans l'intervalle $[-1;5]$, $f(x) = -x^2 + 4x$. Calculer $f'(x)$, et retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 2 (5 points)

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Indication : on pourra dériver deux fois une fonction bien choisie.

Exercice 3 (9 points)

Partie I

On considère la fonction P définie pour tout x réel par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique racine α, et que α appartient à l'intervalle $]1{,}6;1{,}7[$.
3) En déduire le tableau de signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 5cm.

1) Montrer que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x)$. En déduire les variations de f sur I.
2) Trouver les limites de f en -1 et en $+\infty$. Qu'en déduit-on à propos de la courbe $\mathscr{C}$?
3) Trouver l'équation de la tangente D à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4) Tracer la droite D, les éventuelles asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille fournie avec le sujet (on prendra la feuille dans le sens horizontal en utilisant le repère prépositionné).

Rappel de quelques formules utiles, et conseils

- Formules de dérivation : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Équation de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- La calculatrice est non seulement autorisée, mais *vivement conseillée* !