Révisions de géométrie de première S

Quelques exercices sur les barycentres

1) **Exercice 1**

   $ABCD$ est un rectangle de centre O.

   (a) Soit M un point quelconsue du plan. Réduire les sommes vectorielles

   $$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

   (b) Déterminer le lieu des points M tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

   (c) Déterminer le lieu des points M tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

   (d) Réduire la somme $\vec{w} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$, et en déduire le lieu des points M tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$.

2) **Exercice 2**

   $ABCD$ est un rectangle de centre O, λ et μ sont deux réels appartenant à l'intervalle $]0;1[$. On note I et J les poitns tels que $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = \mu\overrightarrow{DI}$.

   On cherche une condition portant sur λ et μ pour que les points A, J et C soient alignés.

   (a) **Solution barycentrique**

      i. Exprimer I comme barycentre de A et B, de masse totale 1, puis J comme barycentre de D et I, de masse totale 1.

      ii. En déduire que J est barycentre du système de points pondérés $((A, \mu(1-\lambda)), (B, \mu\lambda), (D, 1-\lambda))$.

      iii. Soit K le point d'intersection des droites (AJ) et (BD). Exprimer K comme barycentre de B et D.

      iv. En constatant que A, J et C sont alignés si et seulement si A, J et O le sont, en déduire que la condition cherchée est $\lambda\mu = 1 - \mu$.

   (b) **Solution à l'aide d'un repère**

      On muni le plan du repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

      i. Expliquer pourquoi on n'a pas besoin d'un repère orthonormé.

      ii. Calculer les coordonnées dans ce repère du point I, puis du point J.

      iii. En déduire une condition pour que A, J et C soient alignés.

Quelques exercices sur le produit scalaire dans le plan

1) **Exercice 1**

   $ABCD$ est un carré de coté a, M un point du segment $[BD]$, P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB) et (AD).

   On souhaite démontrer que les droites (PQ) et (CM) sont perpendiculaires.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CM}$.

   (b) Montrer que

   $$\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{CM} = -AQ \times DQ \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CM} = -BP \times AP$$

   et conclure.

   (c) Reprendre l'exercice en utilisant un repère orthonormé bien choisi.

2) **Exercice 2**

   A et B sont deux points donnés et O est le milieu de $[AB]$. On pose $AB = d$. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble $\mathscr{L}_k$ des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$, k étant un réel donné.

   (a) Démontrer que $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble des points M tels que $OM^2 = \dfrac{2k - d^2}{2}$.

   (b) En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{L}_k$ selon la valeur de k.

3) **Exercice 3**

   Un champ a la forme d'un quadrilatère convexe $ABCD$. On connaît les dimensions suivantes : $AB = 50$m, $BC = 30$m, $\widehat{DAB} = 135°$, $\widehat{ABC} = 120°$ et $\widehat{BCD} = 45°$.

   Calculer le périmètre et l'aire de ce champ (*indication : trouver d'abord toutes les dimensions du triangle ABC*).