TD Dérivation n°1 : tangentes, nombres dérivés

Équations de droites

1) Déterminer le coefficient directeur des droites suivantes :
   - (AB), avec $A(-2;3)$ et $B(5;-7)$
   - $d_1 : y = 2x - 5$
   - $d_2 : 2x - 3y + 7 = 0$
   - d_3, parallèle à $d_2 : 5x + 12y + 17 = 0$ passant par l'origine.

2) Trouver une équation des droites suivantes :
   - (AB), avec $A(-7;3)$ et $B(-5;2)$
   - (CD), avec $C(3;2)$ et $D(4;2)$
   - d_1 de coefficient directeur $\sqrt{3}$ passant par $U(1;1)$
   - d_3, parallèle à $d_2 : -2x + 10y + 17 = 0$ passant par le point $V(-1;-1)$.

Tangente à une courbe

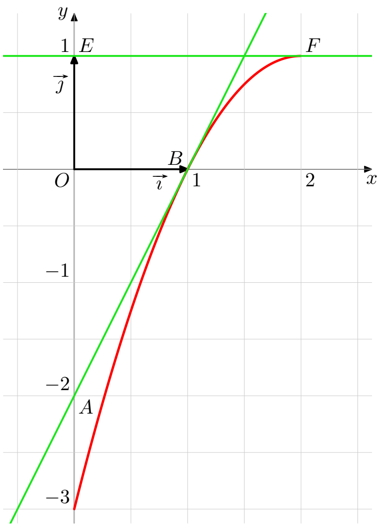

figure 1

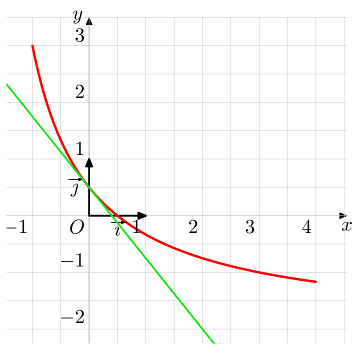

figure 2

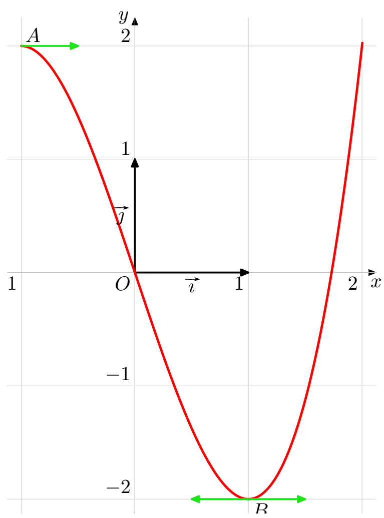

figure 3

1) f est la fonction définie sur $[0;2]$ dont la courbe est représentée dans la figure 1. On admet que (AB) et (EF) sont les tangentes à la courbe respectivement aux points B et F.
   (a) Déterminer les coefficients directeurs de ces deux droites. En déduire $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) On admet que f est définie sur $[0,2]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Retrouver le résultat précédent.

2) Soit g la fonction définie sur $[-1;4]$ dont la courbe représentative est donnée à la figure 2. On admet que la droite (AB) est la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
   (a) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB). Que peut-on en déduire ?
   (b) On admet que la fonction g est définie par la formule $g(x) = \dfrac{-2x+1}{x+2}$. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul.

3) h est la fonction définie sur $[-1;2]$ dont la courbe est donnée figure 3. Les tangentes aux points $A(-1,2)$ et $B(1,-2)$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

(a) Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$, $h'(-1)$ et $h'(1)$.

(b) Établir le tableau de variations de h sur l'intervalle $[-1;2]$. En déduire le signe de $h'(x)$ sur cet intervalle.

(c) On suppose que pour tout $x \in [-1;2]$, $h(x) = ax^3 + bx$. Déterminer les réels a et b à partir des renseignements trouvés dans les questions précédentes, et confirmer les autres renseignements par le calcul.

4) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

(a) $f(x) = -x^2 - x + 2$, $a = -2$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $a = \frac{1}{2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$

(d) $f(x) = 3\ln(x) + 3x + 1$, $a = \frac{2}{3}$

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

(a) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à la droite d d'équation $y = -4x + 6$?

(b) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $A(-2;3)$?

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions suivantes, après avoir indiqué le domaine de validité :

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{4}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x}$

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 3}$

6) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

7) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

8) $f(x) = x^2 \cos x$

9) $f(x) = \tan x$

Approximations affines

Justifier les approximations affines suivantes :

- $(1+x)^3 \approx 1 + 3x$
- $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$
- $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x.$

En déduire des valeurs approchées des nombres $1{,}01^3$, $\sqrt{4{,}2}$ et $\dfrac{1}{2{,}03}$.