TD Dérivation n°2 : étude des variations de fonctions

Étude de variations

Étudier les variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -7x + 3$
2) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
4) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 5$
5) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}$
6) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$
7) $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$
8) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

Études complètes

1) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{3x}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En écrivant $f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{3x}$, montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe de f.
   Préciser la position de la courbe de la fonction f par rapport à Δ.
   (c) Tracer la courbe représentative de f et ses asymptotes dans un repère orthonormé.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \notin \{-1, 2\}$, $f'(x) = -\dfrac{(x+2)(5x+2)}{(x+1)^2(x-2)^2}$.
   En déduire le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire la présence de 3 asymptotes à sa courbe représentative.
   (c) Tracer la courbe représentative de f avec tous les éléments étudiés.
   (d) À l'aide de la courbe de f ou de son tableau de variations, discuter le nombre et la localisation des solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m.

3) (a) Soit P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$.

   i. Dresser le tableau de variations de P sur $\mathbb{R}$.

   ii. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
   En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

   i. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $P(x)$. En déduire le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

   ii. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   iii. Tracer la courbe représentative de f avec tous les éléments étudiés.

Problèmes divers

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 3x + 1 > 2x^3 - 3x - 1$.

2) Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$. Interpréter géométriquement cette inégalité.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.
   En déduire un encadrement de $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

5) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x$, et g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = 2x - \dfrac{16}{x}$. On note $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

   (a) Étudier la fonction f et tracer $\mathscr{C}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction g.

   (c) Montrer que la courbe représentative de g admet deux asymptotes.

   (d) Tracer la courbe Γ et ses deux asymptotes.

   (e) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ ont deux points communs A et B. Que peut-on dire des tangentes aux deux courbes en ces points ?