TD Dérivation n°3 : fonctions usuelles

exp, ln

Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer leur courbe représentative :

1) $f(x) = x^2 + \ln x$
2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3) $f(x) = 2x - 4 - \dfrac{\ln x}{x}$
4) $f(x) = (x-1)\,e^x$
5) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$
6) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{3e^x + 2}$
7) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$
8) $f(x) =$

Fonctions trigonométriques

Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer leur courbe représentative :

1) $f(x) = x + cosx$
2) $f(x) = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^3 t}$
3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Problèmes divers

1) **Exercice 1**

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

   Étudier l'allure de la courbe représentative : extrema locaux, points de contacts avec deux courbes remarquables...

2) **Exercice 2**

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

   (a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que l'on peut écrire

   $$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \quad \text{et} \quad f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

   En déduire que les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f, et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$, Δ_1 et Δ_2.

   (c) Démontrer que f est impaire.

   (d) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

   (e) Tracer Δ_1, Δ_2, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et enfin $\mathscr{C}$.

3) **Exercice 3**

   Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.

   (a) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

   (b) Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Étudier le signe de g sur $]0,1]$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur I.

   (c) Déduire de ce qui précède l'*inégalité de Huygens* : pour tout réel $x \in I$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.

TD Dérivation n°3 : fonctions usuelles

exp, ln

Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer leur courbe représentative :

1) $f(x) = x^2 + \ln x$
2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3) $f(x) = 2x - 4 - \dfrac{\ln x}{x}$
4) $f(x) = (x-1)\,e^x$
5) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$
6) $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{3e^x + 2}$
7) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$
8) $f(x) =$

Fonctions trigonométriques

Étudier les variations des fonctions suivantes, et tracer leur courbe représentative :

1) $f(x) = x + cosx$
2) $f(x) = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^3 t}$
3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Problèmes divers

1) **Exercice 1**

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

   Étudier l'allure de la courbe représentative : extrema locaux, points de contacts avec deux courbes remarquables...

2) **Exercice 2**

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

   (a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que l'on peut écrire

   $$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \quad \text{et} \quad f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

   En déduire que les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f, et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$, Δ_1 et Δ_2.

   (c) Démontrer que f est impaire.

   (d) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

   (e) Tracer Δ_1, Δ_2, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et enfin $\mathscr{C}$.

3) **Exercice 3**

   Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.

   (a) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur I est celui de $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

   (b) Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$. Étudier le signe de g sur $]0,1]$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur I.

   (c) Déduire de ce qui précède l'*inégalité de Huygens* : pour tout réel $x \in I$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.