Cours

Énoncer le principe du raisonnement par récurrence.

Exercices

1) **Récurrence 1**

   (a) Calculer $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

   (b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) **Récurrence 2**

   Soit n un entier non nul. On pose

   $$S_n = 1 + 2 + \cdots + n \quad \text{et} \quad C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

   (a) Calculer S_n et C_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Que pouvez-vous conjecturer ?

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Conclure.

3) **Fonction 1**

   Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

   (c) La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x + 1$? Si oui, quels sont ces points ?

4) **Fonction 2**

   Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

   Indication : il sera peut-être nécessaire de dériver plusieurs fois !

Cours

Énoncer le principe du raisonnement par récurrence.

Exercices

1) **Récurrence 1**

   (a) Calculer $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

   (b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) **Récurrence 2**

   Soit n un entier non nul. On pose

   $$S_n = 1 + 2 + \cdots + n \quad \text{et} \quad C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

   (a) Calculer S_n et C_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Que pouvez-vous conjecturer ?

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Conclure.

3) **Fonction 1**

   Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

   (c) La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x + 1$? Si oui, quels sont ces points ?

4) **Fonction 2**

   Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

   Indication : il sera peut-être nécessaire de dériver plusieurs fois !