Corrigé du test n°2 : récurrence, étude de fonctions

Cours

Revoir le cours !

Exercices

1) **Récurrence 1**

   (a) Si l'on note $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le *nombre d'or*, on a :

$$\rho^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \rho + 1$$

   (b) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : $0 \leqslant u_n \leqslant \rho$.
   - $u_0 = 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Supposons $\mathscr{P}_n$ vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. De $0 \leqslant u_n \leqslant \rho$, on déduit successivement $1 \leqslant u_n + 1 \leqslant \rho + 1 = \rho^2$, et $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n + 1} = \sqrt{\rho^2}$, ce qui se relit : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \rho$.
     Qui peut le plus peut le moins : si $u_{n+1} \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie, et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   - Finalement, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) **Récurrence 2**

   Notons tout de suite que le cours sur les suites arithmétiques nous apprend que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   L'exercice nous demande donc de démontrer que $C_n = S_n^2$ pour tout $n \geqslant 1$.

   D'autre part, on peut constater que les suites (C_n) et (S_n) peuvent être définie par récurrence sous la forme :

$$S_1 = C_1 = 1, \text{ et } \ (\forall n \geqslant 1)\ \ S_{n+1} = S_n + n + 1 \text{ et } C_{n+1} = C_n + (n+1)^3$$

   (a) Un petit tableau évite de recourir à la calculatrice :

n	1	2	3	4	5
n^3	1	8	27	64	125
S_n	1	3	6	10	15
C_n	1	9	36	100	225

   On constate sur ces premières valeurs que $C_n = S_n^2$.

   (b) Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : $C_n = S_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   - On vient de démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 1$, 2, 3, 4 et 5. La proposition est donc (largement) fondée.
   - Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. Alors :

$$C_{n+1} = C_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 4(n+1)\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = S_{n+1}^2$$

     donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie. $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire.
   - $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3) **Fonction 1**

   (a) f est une fonction rationnelle, elle est définie partout où le dénominateur de la fraction ne s'annule pas. Donc ici, l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

   (b) f est dérivable sur son ensemble de définition, et

$$(\forall x \neq 1)\ \ f'(x) = \frac{2x(x-1) - \left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

   Les racines du numérateur sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ (remarquons qu'elles sont symétriques par rapport au pôle 1 !). Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$24-16\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$24+16\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

   Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent à l'aide du théorème sur la limite d'une fonction rationnelle en l'infini. Les limites à gauche et à droite en 1 s'obtiennent à l'aide du théorème sur la limite d'un quotient.

(c) La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $M(x;y)$ est parallèle à la droite d'équation $y=-x+1$ si et seulement si son coefficient directeur est égal à -1, soit encore si et seulement si $f'(x)=-1$.

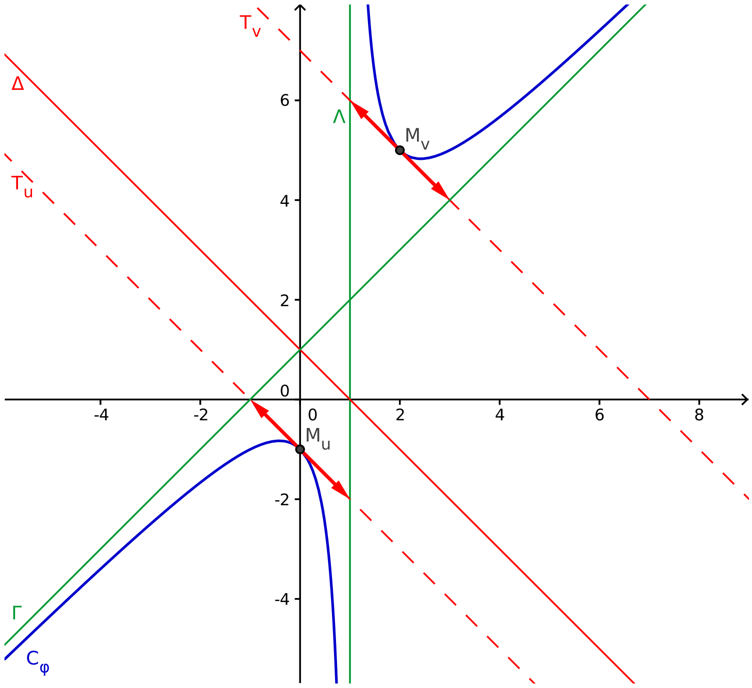
$$f'(x)=-1 \iff \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=-1 \iff x^2-2x-1=-x^2+2x-1 \iff 2x^2-4x=0$$

Les racines de cette équation sont 0 et 2, ce sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquelles la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-x+1$.

En bonus, on pressent l'existence d'une asymptote oblique en $\pm\infty$, dont on peut trouver l'équation par le calcul :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$$

ce qui permet de voir que la droite Γ d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe se trouvant au dessus de Γ au voisinage de $+\infty$, en dessus au voisinage de $-\infty$.



4) **Fonction 2**

Pour montrer que l'équation $x^4+x^3-x+1=0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$, nous allons étudier la fonction $\varphi : x \mapsto x^4+x^3-x+1$.

φ est une fonction polynôme, elle est donc (indéfiniment) dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\varphi'(x)=4x^3+3x^2-1$, mais il semble que le signe de φ' ne soit pas évident à déterminer. D'où l'idée suggérée dans l'énoncé de redériver.

$\varphi''(x)=12x^2+6x=6x(2x+1)$. On peut donc dresser le tableau de variations de φ' :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

De ce tableau, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution α à l'équation $\varphi'(x)=0$, ce qui permet de déterminer le signe de φ', et donc de dresser le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Reste à déterminer le signe de $f(\alpha)$, en espérant qu'il est positif. Pour cela, constatons que, du fait que $\varphi'(1)=6>0$, on déduit $0<\alpha<1$.

On a donc : $\varphi(\alpha)=1-\alpha+\alpha^4+\alpha^3$, avec $1-\alpha>0$, et $\alpha^4+\alpha^3>0$. $f(\alpha)$ est donc bien strictement positif, et le tableau de variations de φ nous apprend alors que φ ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$. L'équation $\varphi(x)=0$ ne peut donc pas avoir de solution sur $\mathbb{R}$.