Bac blanc

Session 2012

Épreuve : Mathématiques

Série : TS, enseignement obligatoire
coefficient : 7

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.
Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte 5 pages plus une annexe à rendre avec les copies.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 : Analyse (5 points)

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On prendra 4cm pour unité graphique.

1) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\,e^{kx}$.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie **B**, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1) (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   (b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$

   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

2) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)\,(e^x - 1)$.

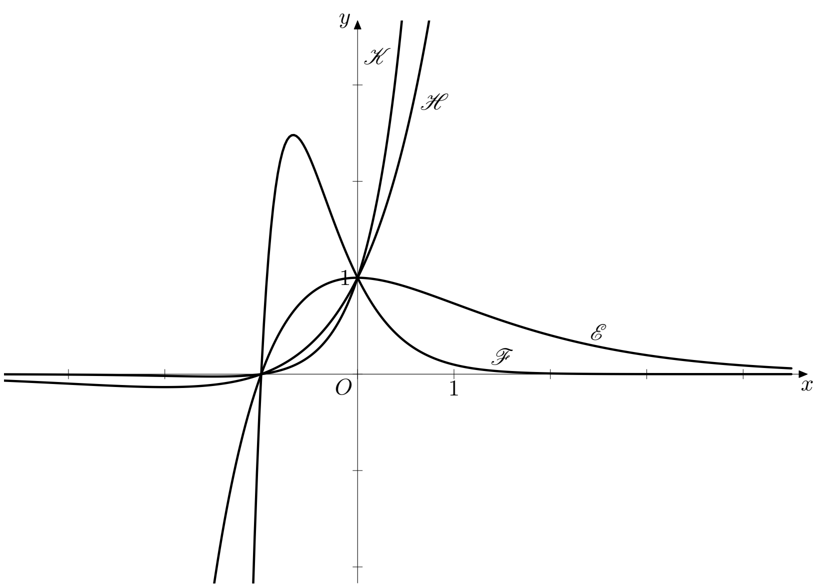
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k (on distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$).

4) Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.

   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Exercice 2 : Probabilités (5 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2) Soit l'événement C : « à l'issue d'une jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

   Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4) À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie B

On dispose d'un second dé cubique B équilibré, présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1) (a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2) Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 3 : complexes et géométrie (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3) (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i :

$$(z' + 2i)(z - i) = 1$$

   (b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$$

   où k est un entier relatif.

4) (a) Démontrer que D et E appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   (b) En utilisant les résultats de la question 3b, placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

Exercice 4 : suites (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.

   (b) Sur le graphique fourni en annexe se trouve représentée la courbe représentative de la fonction f.
   Placer le point $A_0(u_0, 0)$, et tous les éléments nécessaires pour pouvoir construire A_1, A_2, A_3, A_4 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $0 < u_n < 1$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n, et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

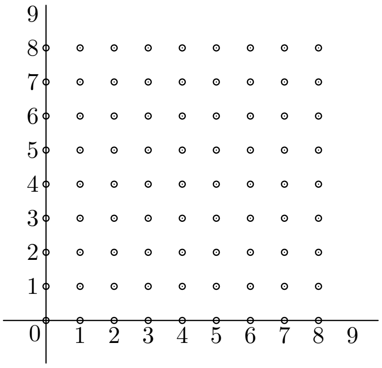
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Nom :
Classe :

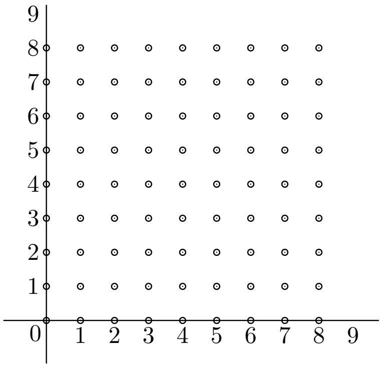
Annexe

à rendre avec la copie

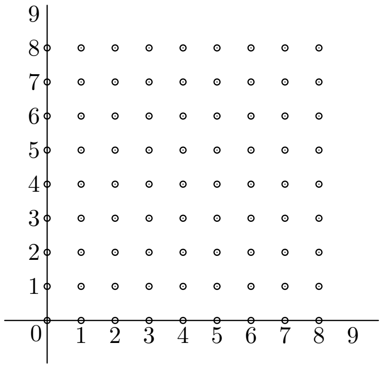
Exercice de spécialité



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Exercice n°4