BAC BLANC

SESSION 2012

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Série : TS, enseignement de spécialité
coefficient : 9

L'usage des calculatrices est autorisé, les documents sont interdits.
Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte 5 pages plus une annexe à rendre avec les copies.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, à condition que la présentation soit claire pour le correcteur. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être utilisé même s'il n'a pas été démontré pour poursuivre l'exercice. Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la note finale.

Exercice 1 : Analyse (5 points)

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On prendra 4cm pour unité graphique.

1) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Étudier les variations de la fonction et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\,e^{kx}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie **B**, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1) (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   (b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

2) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.

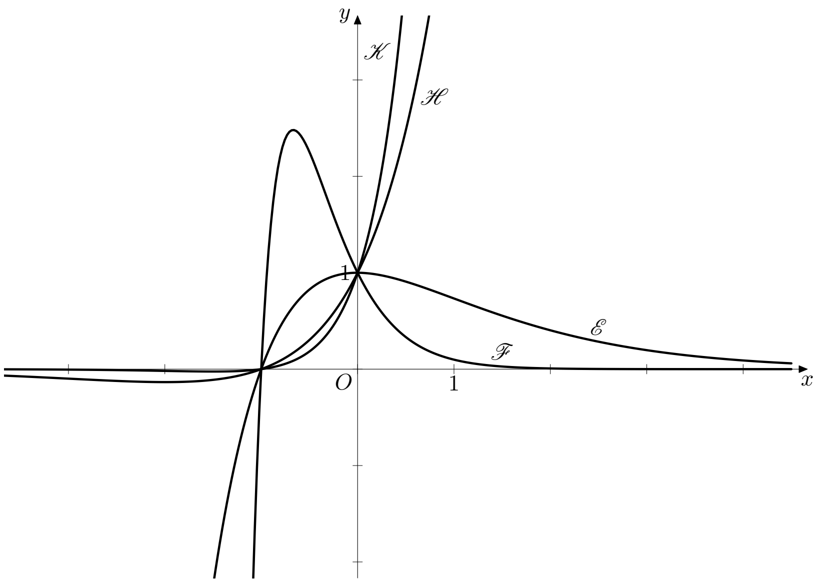
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k (on distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$).

4) Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.

   Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Exercice 2 : Arithmétique (5 points)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

Partie A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété.
Représenter graphiquement les points $M(x; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1) $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 fourni en annexe ;
2) $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 fourni en annexe ;
3) $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3 fourni en annexe.

Partie B - Résolution d'une équation

On considère l'équation $(E)\ :\ 7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).
2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x; y)$ pour laquelle le point $M(x; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

Partie C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$ avec $O(0; 0)$ et $A(a; b)$.

1) Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b, \qquad ay = bx$$

2) Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.
3) Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau.

   (On pourra considérer le PGCD d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

Exercice 3 : complexes et géométrie (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$$

1) Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.

2) Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3) (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i :

$$(z' + 2i)(z - i) = 1$$

   (b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$$

   où k est un entier relatif.

4) (a) Démontrer que D et E appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   (b) En utilisant les résultats de la question 3b, placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5) Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

Exercice 4 : suites (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.

   (b) Sur le graphique fourni en annexe se trouve représentée la courbe représentative de la fonction f.
   Placer le point $A_0(u_0, 0)$, et tous les éléments nécessaires pour pouvoir construire A_1, A_2, A_3, A_4 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $0 < u_n < 1$.

3) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n, et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

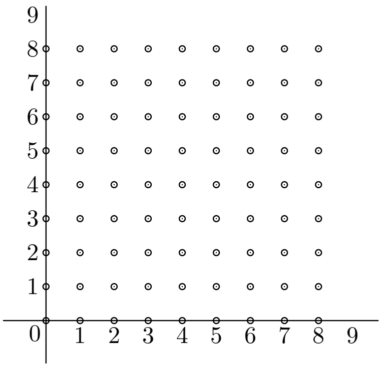
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Nom :
Classe :

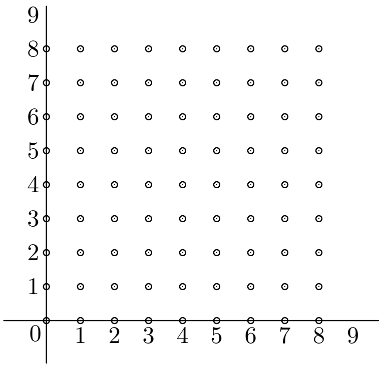
Annexe

à rendre avec la copie

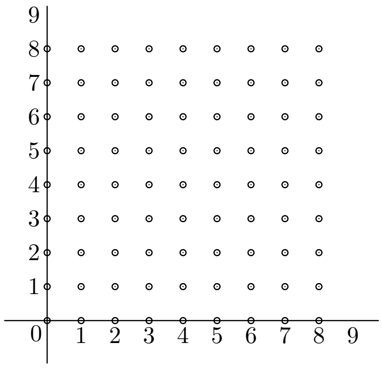
Exercice de spécialité



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Exercice n°4