Corrigé du bac blanc 2012

Exercice 1 : Analyse

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Il suffit de constater que $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, et que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{u} = 0$, par le théorème de limite d'une fonction composée, on obtient bien :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{u} = 0$$

Partie B - Étude d'une fonction

1) Tout d'abord, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et $f'(x) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$.

   De $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$, on tire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   D'autre part, en écrivant $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$, et en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$).

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) La courbe $\mathscr{C}$ est déjà tracée sur le sujet, c'est la courbe $\mathscr{E}$. On peut y rajouter la tangente horizontale au point de coordonnées $(0;1)$.

Partie C - Étude d'une famille de fonctions

1) (a) $f_0 : x \mapsto x+1$ est une fonction affine.

   (b) $M(x;y)$ est point commun aux courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ si et seulement si

$$x+1 = (x+1)e^x \iff (x+1)(e^x-1) = 0 \iff x+1 = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 0$$

   Les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ se coupent donc aux points $A(-1;0)$ et $B(0;1)$. Il est facile de vérifier que

$$f_k(-1) = (-1+1)e^{-k} = 0 \quad \text{et} \quad f_k(0) = (0+1)e^0 = 1$$

   donc ces points appartiennent à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

2) On vient de voir que l'expression $(x+1)(e^x-1)$ s'annule en -1 et 0. Son tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ est déterminée par le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x)$:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)\,e^{(k+1)x} - (x+1)\,e^{kx} = (x+1)\,e^{kx}\,(e^x - 1)$$

qui est justement du signe de $(x+1)(e^x - 1)$, puisque e^{kx} reste strictement positif.

Ainsi, $\mathscr{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathscr{C}_k$ sur $]-\infty;-1[$ et $]0;+\infty[$, en dessous sur $]-1;0[$, les courbes se coupant en $A(-1;0)$ et $B(0;1)$.

3) $f'_k(x) = e^{kx}(kx + k + 1)$ est du signe de $(kx + k + 1)$. On en déduit le sens de variation de f_k, selon le signe de k :

- si $k < 0$, f_k est croissante sur $\left]-\infty;-1-\frac{1}{k}\right]$, décroissante sur $\left[-1-\frac{1}{k};+\infty\right[$;
- si $k < 0$, f_k est décroissante sur $\left]-\infty;-1-\frac{1}{k}\right]$, croissante sur $\left[-1-\frac{1}{k};+\infty\right[$;

4) D'après la question précédente, les courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ correspondent à des valeurs de k strictement négatives. $\mathscr{F}$ étant au dessus de $\mathscr{E}$ sur l'intervalle $]-1;0[$, on en déduit que $\mathscr{E}$ est la courbe représentative de la fonction f_{-1}, et $\mathscr{F}$ celle de la fonction f_{-3}.

D'autre part, les courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ correspondent à des valeurs de k strictement positives. $\mathscr{H}$ étant au dessus de $\mathscr{K}$ sur l'intervalle $]-1;0[$, on en déduit que $\mathscr{H}$ est la courbe représentative de la fonction f_1, et $\mathscr{K}$ celle de la fonction f_2.

Exercice 2 (obligatoire) : Probabilités

Partie A

1) Les deux tirages étant indépendants, la probabilité d'obtenir deux faces noires est (avec des notations que j'espère triviales) :

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = P(N_1) \times P(N_2) = P(N)^2 = \frac{1}{9}$$

On peut bien entendu préférer utiliser un arbre, ce qui limite la rédaction à son strict minimum.

2) On calcule de même les probabilités d'obtenir deux faces vertes ou deux faces rouges. C étant la réunion disjointe de ces trois événements, on a :

$$P(C) = P(N)^2 + P(V)^2 + P(R)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

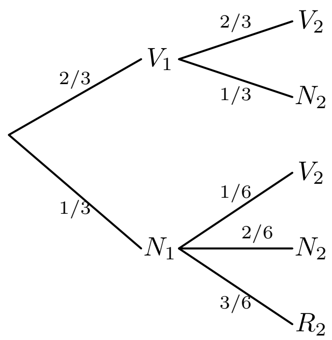
3) L'événement « les deux faces obtenues soient de couleurs différentes » est l'événement contraire de l'événement C, sa probabilité est donc $\dfrac{11}{18}$.

4) On cherche à calculer $P_C(V_1 \cap V_2)$. Comme $V_1 \cap V_2 \subset C$:

$$P_C(V_1 \cap V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(C)} = \frac{1/36}{14/36} = \frac{1}{14}$$

Partie B

1) (a) Voici l'arbre traduisant la situation étudiée :



(b) $P_{v_1}(V_2)$ est la probabilité de tirer une face verte sachant qu'on lance le dé B (une face verte étant sortie au premier lancer), c'est donc $\dfrac{2}{3}$.

2) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

3) On obtient une face verte au deuxième lancer de deux façons différentes :

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

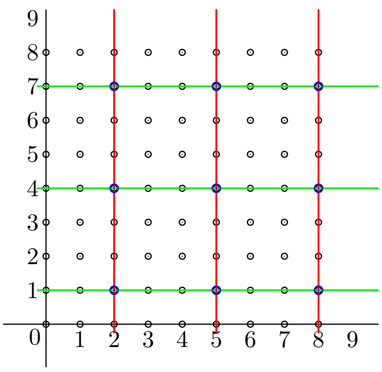
Exercice 2 (spécialité) : Arithmétique

Partie A - Représentation graphique de quelques ensembles

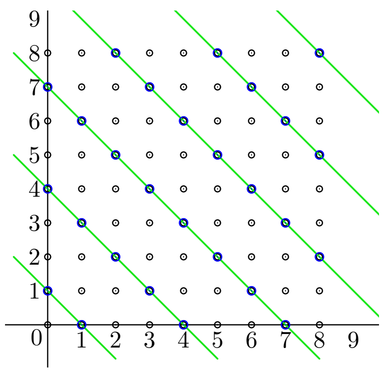
1) $x \equiv 2 \pmod 3$ et $0 \leqslant x \leqslant 8$ équivaut à $x \in \{2;5;8\}$, et $y \equiv 1 \pmod 3$ et $0 \leqslant y \leqslant 8$ équivaut à $y \in \{1;4;7\}$. Les points solutions sont les points d'intersection des droites rouges (d'équation $x = 2$, $x = 5$ et $x = 8$) et des droites vertes (d'équations $y = 1$, $y = 4$ et $y = 7$), sur le graphique 1.

2) $x + y \equiv 1 \pmod 3$ équivaut à $y = -x + 1 + 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$; les points solutions sont ceux appartenant aux droites vertes (d'équations $x + y = 1$, $x + y = 4$...) sur le graphique 2.

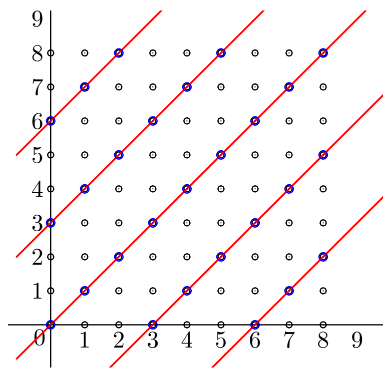
3) $x \equiv y \pmod 3$ équivaut à $y = x + 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$; les points solutions sont ceux appartenant aux droites rouges (d'équations $y = x - 6$, $y = x - 3$...) sur le graphique 3.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Partie B - Résolution d'une équation

1) Appliquons l'algorithme d'Euclide au couple $(7, 4)$:

$$7 = 4 \times 1 + 3$$
$$4 = 3 \times 1 + 1$$

d'où en remontant les calculs :

$$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - 1 \times (7 - 4 \times 1) = (-1) \times 7 - (-2) \times 4$$

Ainsi, le couple $(x_0; y_0) = (-1; -2)$ est solution de l'équation (E).

2) Si $(x; y)$ est solution de (E), alors :

$$7x - 4y = 7x_0 - 4y_0 \text{ soit } 7(x - x_0) = 4(y - y_0) \quad (*)$$

Ainsi, 7 doit diviser $4(y - y_0)$. Mais 7 est premier avec 4, donc d'après le théorème de Gauss, 7 doit diviser $y - y_0$.

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 7k$, soit $y = -2 + 7k$.

Si l'on reporte alors dans la condition $(*)$, on obtient :

$$7(x - x_0) = 4 \times 7k$$

d'où $x=-1+4k$. Ainsi les couples solutions sont nécessairement de la forme $(x;y)=(-1+4k;-2+7k)$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que ces couples sont bien solutions de (E). Finalement :

$$7x-4y=1 \iff (\exists\, k\in\mathbb{Z}) \left\{ \begin{array}{l} x=-1+4k \\ y=-2+7k \end{array} \right.$$

3) $M(x;y)\in R_{4,7}$ et $(x;y)$ solution de (E) revient à dire, d'après ce qui précède :

$$\left\{ \begin{array}{l} x=-1+4k \\ y=-2+7k \\ 0\leqslant x\leqslant 4 \\ 0\leqslant y\leqslant 7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=-1+4k \\ y=-2+7k \\ 0\leqslant -1+4k\leqslant 4 \\ 0\leqslant -2+7k\leqslant 7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=-1+4k \\ y=-2+7k \\ k=1 \end{array} \right. \iff (x;y)=(3;5)$$

Partie C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$ avec $O(0;0)$ et $A(a;b)$.

1) La diagonale (OA) a pour équation : $y=\lambda x$, et A en est un point, ce qui permet d'obtenir $\lambda=\dfrac{b}{a}$.

Ainsi, les points $M(x;y)$ du segment $[OA]$ sont bien caractérisés par les conditions :

$$0\leqslant x\leqslant a, \qquad 0\leqslant y\leqslant b, \qquad ay=bx$$

2) Si a et b sont premiers entre eux, alors de l'équation $ay=bx$, on tire (toujours d'après le théorème de Gauss) que a divise x. Comme $0\leqslant x\leqslant a$, cela ne laisse que deux solutions : $x=0$, auquel cas $y=0$ (point O), ou $x=a$, auquel cas $y=b$ (point A).

O et A sont donc bien les deux seuls points du réseau $R_{a,b}$ appartenant au segment $[OA]$.

3) Si a et b ne sont pas premiers entre eux, soit d leur PGCD. On peut donc écrire :

$$a=da' \text{ et } \quad b=db' \text{ avec } a'\wedge b'=1$$

De $ay=bx$, on tire alors, en divisant par d, $a'y=b'x$. Comme précédemment, a' doit diviser x, d'où l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=ka'$.

Dire que $x\in[\![0,a]\!]$ revient alors à dire que $k\in[\![0,d]\!]$, et puisque par hypothèse $d>1$, ce segment contient d'autres entiers que 0 et 1.

Les points $M_k(x_k;y_k)$ tels que $x_k=ka'$ et $y_k=kb'$, avec $1\leqslant k\leqslant d-1$, sont les points du réseau $R_{a,b}$ appartenant au segment $[OA]$, autres que les points O et A.

Exercice 3 : complexes et géométrie

1) Dire que le triangle ADE est équilatéral direct revient à dire que $AD=AE$ et $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{\pi}{3}\,(\bmod 2\pi)$, soit :

$$\left|\frac{e-a}{d-a}\right|=1 \text{ et } \arg\left(\frac{e-a}{d-a}\right)=\frac{\pi}{3}\,(\bmod 2\pi) \iff \frac{e-a}{d-a}=1.e^{i\pi/3}$$

Ainsi :

$$e=a+e^{i\pi/3}(d-a)=i+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$$

2) $d'=f(1)=\dfrac{2-i}{i+1}=\dfrac{(2-i)(1-i)}{|1+i|^2}=\dfrac{1-3i}{2}$.

3) (a) Soit $z\neq i$. On a :

$$z'+2i=\frac{2z-i}{iz+1}+2i=\frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}=\frac{i}{i(z-i)}=\frac{1}{z-i}$$

donc on a bien $(z'+2i)(z-i)=1$.

(b) En prenant successivement le module et l'argument dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$BM' \times AM = 1 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\,(\bmod 2\pi)$$

ce qui revient bien à dire que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) (a) On a déjà vu que $AD = AE$, cette distance commune étant $|d-a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Ainsi D et E appartiennent bien au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

(b) De $BE' = \dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on tire que E' se trouve sur le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Or il se trouve que c'est aussi la distance BD'. On trace donc le cercle Γ de centre B passant par D'.
D'autre part, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right)(\bmod 2\pi)$, on trace donc la demi-droite d passant par B et parallèle à la symétrique de $[AE)$ par rapport à l'axe des abscisses.
Le point E' se trouve à l'intersection de la demi-droite d et du cercle Γ.

5) Le triangle $BD'E'$ est équilatéral. En effet, on sait déjà que $BD' = BE' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De plus,

$$\left(\overrightarrow{BE'}, \overrightarrow{BD'}\right) = \left(\overrightarrow{BE'}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{BD'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \vec{u}\right) = \frac{\pi}{3}$$

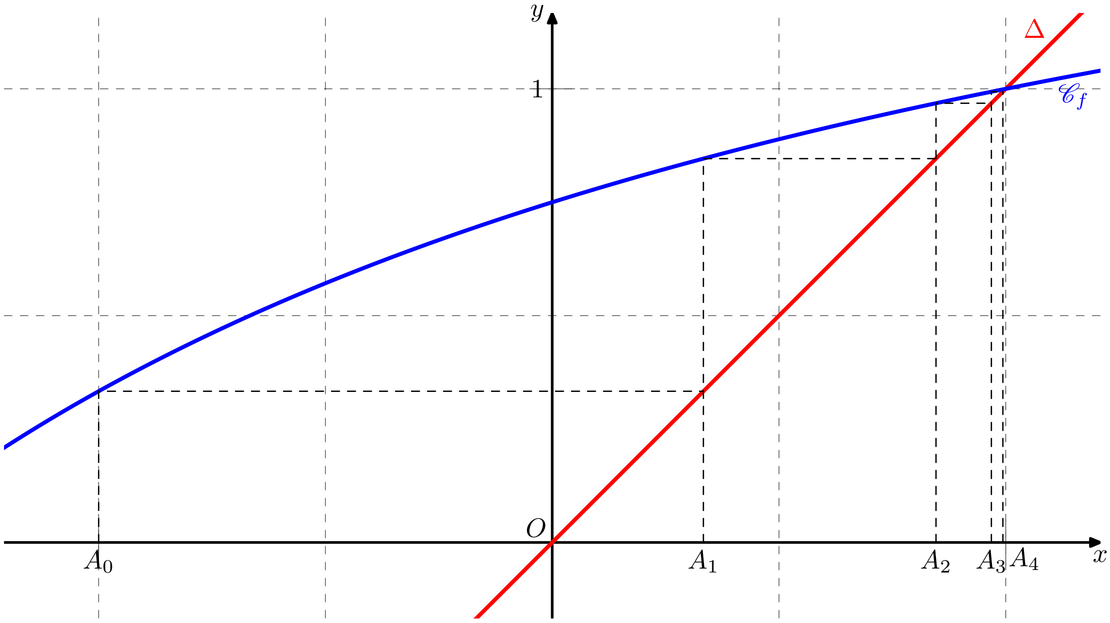
ce qui devrait suffire à notre bonheur.

Exercice 4 : suites

1) On trouve[1] : $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{11}{13}$, $u_3 = \dfrac{61}{63}$.

2) (a) $f'(x) = \dfrac{2(x+4) - (2x+3)}{(x+4)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Pour construire les points demandés, il faut rajouter la diagonale Δ d'équation $y = x$.



On constate que la suite a l'air de converger vers 1, abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la diagonale Δ, aussi appelé *point fixe* de f.

(c) $u_1 = \dfrac{1}{3}$ appartient bien à l'intervalle $]0,1[$, donc la récurrence est fondée.
Supposons que $0 < u_n < 1$ pour un certain entier n. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc en particulier sur $]0,1[$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \in \left]f(0)\,;f(1)\right[= \left[\tfrac{3}{4};1\right[\subset]0;1[$$

[1] ce qui permet d'émettre une conjecture : pour tout entier n, u_n est de la forme $\dfrac{p_n}{p_n+2}$, avec p_n entier dépendant de n dont le chiffre des unités est un 1 !

Donc la propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

3) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} = -\dfrac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.

Le dénominateur est positif, et le numérateur aussi puisque u_n est compris entre 0 et 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (u_n) est strictement croissante.

4) (a) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+4}}{\frac{5u_n+15}{u_n+4}} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} = \frac{1}{5}v_n$$

donc (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -1$.

(b) On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n$, et comme la valeur absolue de la raison est strictement inférieure à 1, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

(c) De $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$, on tire :

$$v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1 \iff u_n = \frac{3v_n + 1}{1 - v_n}$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1 - \frac{3}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}} = \frac{5^n - 3}{5^n + 1}$$

Le numérateur (de la première fraction ci-dessus) a pour limite 1, le dénominateur aussi, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, comme prévu.