Compte-rendu de l'épreuve de mathématiques du bac blanc 2012

Ce document est un compte-rendu des erreurs relevées dans les copies lors de la correction. Il faut le prendre comme un outil de travail, permettant de ne pas refaire les erreurs commises, et non comme un défouloir des correcteurs. Si vous sentez parfois un certain agacement de la part du rédacteur, il faut le comprendre comme l'expression d'une certaine lassitude à répéter toujours la même chose et à corriger toujours les mêmes erreurs.
Si vous rencontrez une remarque concernant une erreur que vous avez commise, il faut la noter, relire votre copie, le corrigé, et vous coller un post-it sur le front pour ne pas oublier d'y penser la prochaine fois que vous serez confrontés au même genre de problème.
Il faut bien comprendre que les erreurs que vous faites sont l'expression de notions qui sont mal rentrées au moment de leur acquisition. Si vous voulez corriger ces erreurs, il faut que vous fassiez un travail intensif d'extraction de la notion erronée dans votre tête, pour y replanter le bonne notion. Cela demande du temps, mais c'est la meilleure (voire la seule) façon de procéder. Si vous ne faites pas ce travail, vous referez les mêmes erreurs.
Errare humanum est, mais il y a une suite à ce proverbe !

Remarques générales

- Une remarque qui vaut pour l'ensemble du devoir : il y a beaucoup trop d'affirmations incorrectes, voire complètement fausses, qu'il aurait été très simple d'éviter en faisant une vérification à la calculette (sens de variation, limites...). L'outil est autorisé, ne pas l'employer revient à se tirer une balle dans le pied !

- Beaucoup de calculs commencés sur la copie n'aboutissent pas, **il n'est pas normal qu'ils apparaissent sur les copies**. Le brouillon n'a pas été inventé pour faire des cocottes en papier, il est là pour faire des essais. Le seul cas où on peut recopier un calcul qui n'aboutit pas est dans une question "ouverte", dans laquelle il est signalé que "toute trace de recherche sera évaluée".

- Les calculs, parlons-en ! Quand ils ne sont pas complètement faux (genre $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$), ils manquent violemment d'efficacité. Or, plus un calcul est long, plus les chances de faire une erreur augmentent.

  Encore une fois, le brouillon est là pour servir, on peut faire une première fois un calcul peu efficace, et puis le relire et constater qu'on aurait pu le simplifier. Bien faire attention quand même à ne pas trop "expurger" le calcul recopié : pour certains, le calcul d'une dérivée se ramène à l'écriture du résultat. Le correcteur peut alors légitimement se poser la question de la provenance du résultat : bon coup d'œil, calculette formelle...

  Le calcul est une part non négligeable de votre enseignement, il met en œuvre un certain nombre de techniques qu'on souhaite évaluer. Il faut donc ne pas insister sur une étape inintéressante, mais par contre détailler, et éventuellement *commenter* une étape importante.

- Si jamais on constate que le résultat issu du raisonnement ou du calcul ne colle pas avec ce que l'on observe (par exemple parce que la courbe est donnée dans l'énoncé !), ne pas hésiter à reprendre l'intégralité des calculs. Si on ne trouve pas son erreur, il peut être bon de le signaler dans la copie, et de ne pas utiliser de résultat incorrect dans toute la suite de l'exercice !

- Une dernière remarque sur laquelle vous devriez TOUS méditer : **RAS LE BOL** des copies qui ressemblent à des **torchons**. Si vous vous foutez de votre correcteur, ne venez pas vous plaindre s'il vous manque des points à la fin.

  On vous a déjà expliqué le principe de la note entière au bac : l'examinateur ajuste au point supérieur ou inférieur selon son impression d'ensemble. Très peu de copies méritent que la note soit ajustée vers le haut, et pour certaines copies, on a vraiment envie de retirer un point ! Faites votre calcul : que vaut un point, coefficient 7 ou 9, le jour du bac ? La différence entre l'admission immédiate ou l'oral, ou bien entre une mention et pas de mention ?

  Donc le minimum attendu : pas de ratures, une écriture lisible, les titres et numéros de sections soulignés (si possible pas en bleu !), des résultats clairement mis en valeur (ne serait-ce qu'en évitant de les perdre dans le labyrinthe des calculs), des calculs correctement disposés de manière à être faciles à relire, des petits schémas lorsqu'ils expliquent mieux ce que vous faites que votre prose, et des courbes et autres dessins réalisés avec autre chose qu'un marteau-piqueur. Pour les raisonnements, un principe simple : une idée, une ligne.

EXERCICE 1

La classique étude de fonction(s) ! Le cours d'analyse, mais aussi le cours d'algèbre, sont intensivement utilisés.

- La question de cours, élémentaire, n'est pas bien traitée. Il suffit pourtant de constater que $xe^{-x} = \dfrac{1}{e^x/x}$!

  Le fait que les profs de maths signalent dans leur cours que "la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes" ne peut constituer une preuve en soit. Cela donne simplement une indication sur la réponse à un problème de limite, et permet d'orienter le calcul (en général, une factorisation par e^x suivie de l'application du théorème qu'on demande ici de démontrer, ou de sa prémisse !).

- La partie B consiste en une étude de fonction simple. Ne pas oublier de signaler la dérivabilité de la fonction à étudier. En particulier, $x \mapsto e^{-x}$ n'est pas une fonction "exponentielle", mais une fonction *composée* de la fonction $x \mapsto -x$ par la fonction exponentielle.

  En dehors de quelques calculs de dérivées boiteux, le soucis principal vient des calculs de limites. Il ne suffit pas d'écrire "$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$". Il faut expliquer comment on trouve ce résultat. Bien noter que le théorème qui permet de supprimer les termes négligeables ne s'applique qu'aux fonctions polynômes et aux fonctions rationnelles. Les seuls théorèmes utilisables sont les théorèmes du cours : sommes, produits, quotients, composées de limites, et les théorèmes permettant de lever une forme indéterminée.

  Un certain nombre d'élèves n'hésitent pas à utiliser les "théorèmes" $0\times\infty = 0$, ou $0\times\infty = \infty$", au choix, comme cela les arrange. Règle générale : ne pas écrire de limite dont on ne connaisse pas à l'avance le résultat (parce qu'un théorème nous la donne), et ne rien écrire qui ne permette pas de conclure, comme par exemple : "on tombe sur $0\times\infty$, c'est une forme indéterminée, il faut donc procéder autrement" (version honnête du cas précédent).

  Enfin, les courbes sont en générale bien mal traitées ! L'échelle est donnée, il faut la respecter. Il y a une tangente horizontale, il faut la faire apparaître sur le graphique. Enfin, il est nécessaire de calculer une bonne dizaine de points pour éviter les tracés trop approximatifs.

- La partie C demande d'étudier une famille de fonctions dépendant d'un paramètre réel k. Il faut bien comprendre que pour une fonction donnée, k est une constante. Lorsqu'on change la valeur de k, on change de fonction.

  La fonction f_0 est un peu particulière parmi toutes les fonctions de la famille, puisqu'elle est la seule à ne pas "contenir" d'exponentielle : c'est une fonction *affine* (et non pas linéaire, comme on le lit dans certaines copies !).

  Lorsqu'on résout une équation (comme celle découlant de la recherche des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$), il faut toujours se ramener à un type d'équation connu : $A \times B = 0$, $e^x = k$, $\sin x = k$... Dire : "tiens, 0 est solution ; oh, et puis aussi -1 !" n'est pas suffisant : il peut y avoir d'autres solutions. D'autre part, une erreur courante qu'il faut éliminer :

  $$(x+1)\,e^x = x+1 \iff e^x = \frac{x+1}{x+1} = 1 \iff x = 0$$

  et on a perdu une solution (qu'on retrouve parfois par la bande par un "raisonnement" du genre précédent : "ah, oui, il y a aussi -1").

  Diviser revient en général à *perdre une solution* : celle qui découle du cas où la quantité par laquelle on divise (ici $x+1$) s'annule. Si l'on veut la garder, il ne faut pas diviser, mais *factoriser*. **Si vous devez ne retenir qu'une seule chose de ce compte-rendu, ce serait bien que ce soit celle-ci !**

  En ce qui concerne l'étude de signe (on aura remarqué que la quantité dont on étudie le signe est exactement $f_1(x) - f_0(x)$, qu'on a normalement déjà fait apparaître dans la question précédente), le principe est le même : on cherche le signe d'un produit (parce qu'on a factorisé l'expression), on fait donc un **tableau de signes**. Tout élève qui pense ne serait-ce qu'une seconde à développer n'a pas compris l'intérêt de la factorisation et doit reprendre tous ses cours de mathématiques depuis la seconde[1].

  Une remarque importante sur ces problèmes de signes : trouver une limite (par exemple $+\infty$) ne permet pas de garantir le signe **global** (c'est-à-dire sur l'intégralité de l'ensemble d'étude), mais seulement le signe **local**. Si l'énoncé demande l'étude du signe sur $\mathbb{R}$, il faut résoudre une inéquation, et non pas regarder ce qui se passe pour x très grand.

  Enfin, l'avant dernière question (l'étude des variations de la fonction f_k) est sans doute la plus difficile, puisqu'elle demande d'étudier un problème dont la réponse va changer selon la valeur du paramètre.

  Il ne faut pas s'affoler, et se dire que les méthodes mises en œuvre dans la partie B s'appliquent encore : calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée, tableau de variations. C'est dans la deuxième partie du raisonnement qu'on a besoin de réfléchir selon le signe de k : $f_k'(x) = e^{kx}(kx+k+1)$ est du signe de $(kx+k+1)$. Or

  $$kx+k+1 > 0 \iff kx > -1-k \iff x \overset{?}{\gtrless} \frac{-1-k}{k}$$

  et il faut se rendre compte qu'au moment où on *divise* par k, on doit se poser la question de son signe.

  Encore une fois, ces résolutions d'équations et d'inéquations doivent s'appuyer sur des *théorèmes* ! Ne pas en inventer de nouveaux. Un exemple parmi d'autres, tiré d'une copie :

  $$k(x+1) < -1 \iff k < -1 \text{ ou } x+1 < -1$$

  Sans commentaire[2] !!!

[1] Je répète à cette occasion que le propos n'est pas de me moquer de vos erreurs, mais bien de vous en faire prendre conscience. Plus l'erreur est grave et profonde, plus le propos doit être fort pour marquer l'esprit et permettre son extraction !

[2] Même remarque !

La dernière question demande de *justifier* la réponse, il faut donc donner des arguments. Ceux-ci doivent provenir de ce que vous avez étudié avant. Il est certain que si vous n'avez pas su répondre aux questions précédentes, vous ne pouvez pas inventer ces arguments. N'hésitez pas alors essayer de les tirer de votre calculette !

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE

Les exercices de probabilité sont en général bien traités dans les épreuves de bac. Mais certaines erreurs récurrentes peuvent être évitées simplement.

- Penser à justifier les réponses, soit à l'aide d'un arbre de probabilité (si celui-ci n'est pas explicitement demandé), soit par des formules du cours :

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A), \quad P(A \cap B) = P(A) . P_A(B)$$

  la dernière formule étant la plus maltraitée : on oublie souvent le A de la seconde probabilité *conditionnelle*, ou bien on oublie de dire pourquoi on a le droit de l'oublier : *indépendance*.

- Ne pas hésiter à donner des noms aux événements qui vont permettre d'écrire les formules : N_1 pour “le premier lancer donne une face noire”, V_2 pour “le deuxième lancer donne une face verte”...

- Ne pas non plus hésiter à utiliser le vocabulaire du cours : univers, événements, partition, incompatibilité, indépendance... Donner un nom aux choses rend en général plus simple leur assimilation profonde et leur utilisation.

- Peu d'élèves savent répondre à la question 4) de la première partie : il s'agit pourtant simplement d'appliquer la formule définissant la probabilité conditionnelle :

  $$P_C(V_1 \cap V_2) = \frac{P((V_1 \cap V_2) \cap C)}{P(C)}$$

  et le seul soucis consiste à réfléchir à la probabilité de l'événement $(V_1 \cap V_2) \cap C$. Le dire en français règle le problème : comme tous les tirages qui ont donné deux faces vertes *sont* des tirages unicolores, cet événement est simplement $V_1 \cap V_2$, dont on a déjà calculé la probabilité.

- La probabilité conditionnelle de la question 1)(b) de la deuxième partie ne doit pas être calculée : il faut simplement dire ce qu'elle signifie, elle se lit directement dans l'arbre qui a été demandé à la question précédente.

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ

Cet exercice semblait relativement simple, puisque les deux premières parties sont des applications directes du cours (même si la première partie était dans sa formulation un peu originale), mais il a donné de bien mauvais résultats.

- Dans la partie A, beaucoup d'élèves oublient des solutions. Il suffit pourtant de se rendre compte qu'une équation de la forme $ax + by \equiv c \pmod m$ représente une famille d'équations de droites de la forme $ax + by = c + km$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit alors de tracer toutes ces droites, et de relever les points du réseau qu'elles contiennent.

- La partie B est du cours. Il n'est pas inutile, pour la première question, d'expliquer comment on a trouvé la solution particulière (le cours donne l'algorithme d'Euclide, ça n'est pas ramener sa science que de l'invoquer !).

Pour la deuxième question, la plupart des élèves oublient la réciproque. Dans le raisonnement :

$$7(x-x_0)=4(y-y_0) \text{ donc 7 divise } 4(y-y_0) \text{ or } 7\wedge 4=1 \text{ donc } 7|y-y_0 \text{ d'où } y=y_0+7k...$$

on obtient une *forme nécessaire* des solutions du problème. Il ne faut pas oublier de vérifier que tous les couples que l'on obtient (de la forme $(-1+4k,-2+7k)$) sont bien solution, en réinjectant dans l'**équation initiale**.

- La partie C a été la plus mal traitée.

  Beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que $ay=bx$ est l'équation de la droite (OA) (ou ne savent pas obtenir cette équation).

  D'autre part, et c'est là le point le plus important, l'hypothèse "a et b premiers entre eux" de la deuxième question est en général mal utilisée : l'identité de Bezout n'est pas la seule façon de traduire cette hypothèse. Une autre possibilité est de l'utiliser comme prémisse à l'application du théorème de Gauss (voir le corrigé).

  Ce raisonnement se reproduit dans la dernière question : il faut se souvenir que si l'on note $d=a\wedge b$, et qu'on écrit $a=da'$ et $b=bd'$, alors on a une hypothèse supplémentaire : *a' et b' sont premiers entre eux.*

Exercice 3

Un exercice de géométrie à résoudre à l'aide des complexes. Des soucis dans les calculs (comme c'est étonnant), et dans la traduction des calculs en propriétés géométriques.

- Pour la question 1), on pouvait parler de rotation ("E est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$" est une phrase que vous avez tous entendu des dizaines de fois, mais cela ne se voit pas forcément dans les copies !), ou bien dire que ADE est un triangle isocèle ($AD=AE$) dont l'angle au sommet A est $\frac{\pi}{3}$ ($\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}$).
- La deuxième question demande l'écriture algébrique de l'image de D, pour obtenir son abscisse et son ordonnée. Des erreurs de calcul, toujours des erreurs de calcul...
- La question 3)(a) proposait d'obtenir une relation entre les affixes de z et z' d'un point M et de son image M'. Pratiquement personne n'a remarqué que $iz+1=i(z-i)$, ce qui rend le calcul très simple.
- Dans la question 3)(b), on fait la traduction de ce calcul en termes de propriétés géométriques. Très peu d'élèves signalent qu'on utilise à cette occasion des propriétés du module ($|zz'|=|z|\,|z'|$) et de l'argument ($\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$). Et pour certains, il n'y a pas de différence entre un nombre complexe et le point ou le vecteur dont il est l'affixe (ce qui, avec certaines précautions, peut ne pas s'avérer trop grave), voire un complexe et son module (ce qui est nettement plus grave !).
- La question 4)(a) est très simple, quand on pense à relever le nez du guidon : on sait déjà que $AD=AE$ (c'est une conséquence de la question 1) !), il n'y a plus qu'à calculer AD, qui est le module de z_D-z_A.
- La question 4)(b) met en œuvre ces propriétés géométriques. Bien peu d'élèves expliquent leur construction, en utilisant ce qu'ils ont fait plus haut avec $M=E$ et $M'=E'$.
- Enfin, je n'ai rien à dire sur la dernière question... parce que personne ne l'a traitée ! Il était pourtant relativement simple de constater que le triangle $BD'E'$ était nécessairement isocèle en B.

EXERCICE 4

Cet exercice est essentiellement du programme de première.

- Attention à ne pas étudier une fonction en dehors de l'ensemble sur lequel on demande de l'étudier. Cela ne peut provoquer QUE des ennuis !

- Pour la question 2)(b), il faut se souvenir de l'élément le plus important de la figure : la première diagonale Δ (d'équation $y = x$). C'est elle qui permet de reporter les ordonnées sur l'axe des abscisses.

- Une grosse erreur dans la question 2)(c) : de $0 < u_n < 1$, on peut déduire

  $$3 < 2u_n + 3 < 4 \quad \text{et} \quad 4 < u_n + 4 < 5$$

  mais cela ne permet pas de déduire que $\dfrac{3}{4} < u_{n+1} < \dfrac{5}{5}$: *on ne divise pas* des inégalités ! Les seuls théorèmes utilisables sont ceux du cours : somme, produit, inverse (en respectant les hypothèses !).

  Il aurait pourtant été si simple d'utiliser la question précédente : f est strictement croissante, donc de $0 < u_n < 1$, on déduit $f(0) < f(u_n) < f(1)$...

  Certains élèves ont remarqué que $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n + 4}$, ce qui permet aussi de conclure (c'est grosso-modo ce qui permet de montrer que f est strictement croissante sur $]-4; +\infty[$).

- Attention : si (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors les variations de (u_n) n'ont **rien à voir** avec les variations de f ! Par exemple, ici, si l'on prend $u_0 = -1$, on obtient une suite croissante, mais si l'on prend $u_0 = 2$, on obtient une suite *décroissante*. Pourtant, dans les deux cas, on se trouve à un endroit où f est croissante !

  On peut au choix :

  - raisonner par récurrence, en utilisant le fait que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$,
  - ou comparer $f(x)$ à x, puisqu'on a aussi $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

  Ici, l'étude du signe de $f(x) - x$ se ramène à l'étude du signe d'un trinôme.

- La fin demande de connaître UNE formule sur les suites géométriques, si possible la bonne !

  Une ânerie rencontrée quelques fois : $\lim\limits_{n \to -\infty} v_n = -\infty$!!! Dans l'ensemble des entiers naturels, il n'y a qu'un seul endroit où on peut considérer une limite (on parle d'un seul *point d'accumulation* en topologie) : c'est ∞, sans signe justement, parce que ce n'est pas le même infini que celui de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{R}$.