Corrigé du DM n°6
Suites, probabilités, géométrie dans l'espace

EXERCICE 91 P.187 : SUITES

La suite (u_n) est définie par $u_1 = -1$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

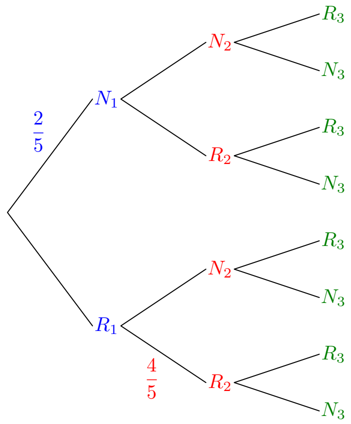
1) Prouvez, en raisonnant par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 3.
2) Étudiez le sens de variation de (u_n).
   Déduisez-en que (u_n) est convergente.
3) La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = n(3 - u_n)$.
   Démontrez que (v_n) est une suite géométrique. Précisez le premier terme et la raison.
4) Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n, puis déterminez la limite de la suite (u_n).

1) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : $u_n \leqslant 3$.
   $u_1 = -1 \leqslant 3$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$. Alors :
   $$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{n(u_n+3)+6}{2(n+1)} \leqslant \frac{6(n+1)}{2(n+1)} = 3$$
   (en vérifiant bien qu'on ne fait que des majorations autorisées : contrôle de signe...). Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie.
   $\mathscr{P}_n$ est fondée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.
2) Soit $n \geqslant 1$.
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n = \frac{(3-u_n)(n+2)}{2(n+1)} \geqslant 0$$
   donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et la suite (u_n) est croissante.
   La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle est donc convergente.
3) Cherchons à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n :
   $$v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1}) = 3(n+1) - \frac{n}{2}u_n - \frac{3(n+2)}{2} = \frac{1}{2}n(3-u_n) = \frac{1}{2}v_n$$
   Ainsi (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 1(3-u_1) = 4$.
4) On sait alors que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{8}{2^n}$.
   On en déduit : $u_n = 3 - \frac{v_n}{n} = 3 - \frac{8}{n2^n}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} n2^n = +\infty$, on a finalement : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$.

Exercice 59 p.277 : probabilités conditionnelles

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i (resp. R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (resp. « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduisez et complétez l'arbre de probabilités suivant :



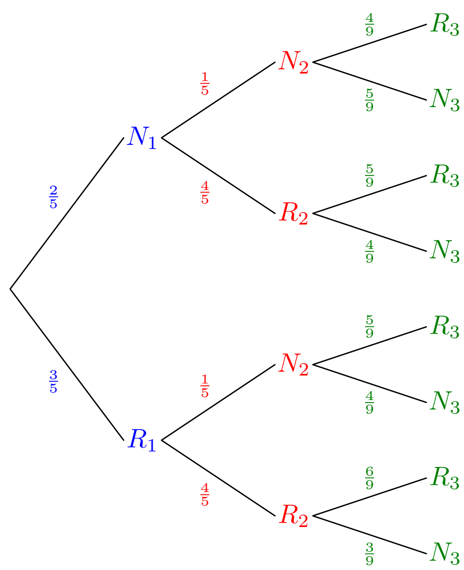
2) (a) Calculez la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   (b) Déduisez-en la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
   (c) Calculez de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3) Déduisez de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

1) Voici l'arbre complété. Les probabilités des deux premiers étages se déduisent immédiatement du contenu initial des urnes U_1 et U_2, celles du troisième étage dépendent de ce qu'on a transféré dans l'urne U_3 : deux boules rouges, une rouge et une noire ou deux noires. Dans tous les cas, il y a neuf boules au moment du tirage dans U_3.



2) (a) On peut directement lire l'arbre, ou bien utiliser les probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = P(N_1) \times P(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{10}{225} = \frac{2}{45} \end{aligned}$$

puisque les événements N_1 et N_2 sont indépendants, et parce que si $N_1 \cap N_2$ est réalisé, il y a 5 boules noires dans l'urne U_3. De même :

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P(R_2) \times P_{N_1 \cap R_2}(N_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225} \end{aligned}$$

(b) Les événements N_2 et R_2 forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_3) &= P((N_1 \cap N_3) \cap N_2) + P((N_1 \cap N_3) \cap R_2) \\ &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{42}{225} \end{aligned}$$

(c) De la même façon, cette fois-ci en lisant l'arbre :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap N_3) &= P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{48}{225} = \frac{16}{75} \end{aligned}$$

3) N_1 et R_1 forment eux aussi une partition de l'univers, donc toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$P(N_3) = P(N_1 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_3) = \frac{90}{225} = \frac{2}{5}$$

4) $P(N_1 \cap N_3) = \dfrac{14}{75}$, alors que $P(N_1) \times P(N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25} = \dfrac{12}{75}$.

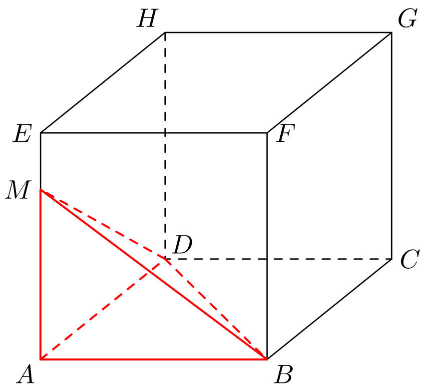
$P(N_1 \cap N_3) \neq P(N_1) \times P(N_3)$, donc N_1 et N_3 ne sont pas indépendants (on s'en doutait un peu, mais on nous demande de le justifier *rigoureusement*).

5) On cherche $P_{N_3}(R_1)$. On a tout ce qu'il faut :

$$P_{N_3}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_3)}{P(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{15}$$

EXERCICE 45 P.398 : PRODUIT SCALAIRE

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif. On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.



1) Déterminez le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a.

2) Soit K le barycentre du système de points pondérés : $\{(M; a^2); (B; 1); (D; 1)\}$.

   (a) Exprimez $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.

   (b) Calculez $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ puis déduisez-en l'égalité $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

   (c) Démontrez l'égalité $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

   (d) Démontrez que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3) Démontrez les égalités $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4) (a) Prouvez que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   (b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire.
   Déterminez la distance AK dans ce cas.

1) $[AM]$ est la hauteur issue de A du tétraèdre $ABDM$, donc

$$\mathscr{V}(ABDM) = \frac{1}{3}\mathscr{A}(ABD) \times AM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{6a}$$

2) (a) Pour tout point P de l'espace, on a :

$$a^2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = (a^2+2)\overrightarrow{PK}$$

ce qui, en prenant $P = B$, donne :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}$$

(b) Utilisons ce qui précède :

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a^2+2}$$

En effet, (AM) est orthogonale au plan (ABD), donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, donc en particulier $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = 0$, et par projection ou en décomposant $\overrightarrow{BM}$ en $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AM} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \frac{1}{a^2}$.
De la même façon :

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{a^2+2}\underbrace{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AD}}_{=0} + \frac{1}{a^2+2}\underbrace{\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD}}_{=1} = \frac{1}{a^2+2}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a^2+2} = 0$$

(c) Les points B et D jouent des rôles parfaitement symétriques dans la figure, ainsi que dans la définition de K, donc en faisant des calculs en tout points similaires à ce qui précède, on montre $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

(d) D'après ce qui précède, $(BK) \perp (MD)$ et $(DK) \perp (MB)$, donc (BK) et (DK) sont les hauteurs issues de B et D du triangle MDB. Leur point d'intersection K est donc l'orthocentre du triangle BDM.

3) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\right).\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB}$. Or $(AD) \perp (AMB)$, donc (AD) est perpendiculaire à toute droite de ce plan, donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MB} = 0$, et on sait déjà que $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$. Ainsi $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$.

On montre de la même façon que $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MD} = 0$.

La droite (AK), perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (MDB), est donc orthogonale à ce plan, ce qui permet de considérer K comme la projection orthogonale de A sur le plan (MDB), ou bien $[AK]$ comme la hauteur issue de A du tétraèdre $AMDB$.

4) (a) Il est clair que $BM = DM = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$, donc le triangle BDM est isocèle.

Si on appelle I le milieu du segment $[BD]$, (MI) est la hauteur issue de M de ce triangle, et :

$$MI^2 = MB^2 - BI^2 = MB^2 - \frac{1}{4}BD^2 = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2} = \frac{a^2+2}{2a^2}$$

donc

$$\mathscr{A}\left(MDB\right) = \frac{1}{2}MI \times BD = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{2}a}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$$

(b) Cette aire est égale à une unité d'aire si et seulement si

$$\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1 \iff \begin{cases} \sqrt{a^2+2} = 2a \\ a \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2 = 4a^2 \\ a > 0 \end{cases} \iff a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Recalculons le volume du tétraèdre $ABDM$: $\frac{1}{6a} = \mathscr{V}\left(ABDM\right) = \frac{1}{3}\mathscr{A}\left(BDM\right) \times AK$, donc :

$$AK = \frac{3}{6a\mathscr{A}\left(BDM\right)} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$