Corrigé du DM n°8 : Équations différentielles

EXERCICE 83 P. 109

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C)\left\{\begin{array}{l}(\forall x\in\mathbb{R})\ f(-x)\,f'(x)=1\\ f(0)=-4\end{array}\right.$$

puis de déterminer cette fonction.

1) On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(-x)\,f(x)$.
   (a) Démontrez que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculez la fonction dérivée de la fonction g.
   (c) Déduisez-en que la fonction g est constante et déterminez sa valeur.
   (d) On considère l'équation différentielle (E) : $y'=\dfrac{1}{16}y$.
   Montrez que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0)=-4$.
2) Démontrez qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3) Déduisez des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et précisez quelle est cette fonction.

1) (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Appliquant la première partie de la condition (C) en $-x$, on obtient $f(x)\,f'(-x)=1$, ce qui entraîne en particulier $f(x)\neq 0$.
   (b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-f'(-x)\,f(x)+f(-x)\,f'(x)$.
   (c) À l'aide de la première partie de la condition (C) appliquée en x et en $-x$, on obtient :
   $$g'(x)=-f'(-x)\,f(x)+f(-x)\,f'(x)=-1+1=0$$
   donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Avec la deuxième partie de la condition (C), on obtient alors :
   $$g(0)=f(0)^2=16$$
   Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=f(-x)\,f(x)=16$.
   (d) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a d'une part $f'(x)=\dfrac{1}{f(-x)}$, d'autre part $f(-x)=\dfrac{16}{f(x)}$, donc
   $$f'(x)=\frac{1}{f(-x)}=\frac{1}{\frac{16}{f(x)}}=\frac{1}{16}f(x)$$
   Enfin, on sait déjà à l'aide de la condition (C) que $f(0)=-4$.
2) Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto Ce^{x/16}$, où C est une constante réelle.
   Une telle fonction prend la valeur -4 en 0 si et seulement si $Ce^{0/16}=-4$, soit $C=-4$.
   Ainsi, l'unique solution de l'équation (E) prenant la valeur -4 en 0 est la fonction $x\mapsto -4e^{x/16}$.
3) On a montré dans les questions précédentes que s'il devait exister une fonction f vérifiant la condition (C), cela ne pouvait être que la fonction $f : x\mapsto -4e^{x/16}$: nous avons montré *l'unicité de la solution*, et trouvé une *forme nécessaire* de cette solution.
   Réciproquement, on constate que cette fonction vérifie bien $f(0)=-4$, et
   $$(\forall x\in\mathbb{R})\ f(-x)\,f'(x)=\left(-4e^{-x/16}\right)\left(\frac{-4}{16}e^{x/16}\right)=1$$
   donc cette fonction est bien solution du problème : nous avons montré l'*existence d'une solution*.

Exercice 86 p.110 : étude d'une population de rongeurs

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. La variable t réelle désigne le temps exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution dans $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1)\ :\ y' = \dfrac{y}{4}$.

   (a) Résolvez (E_1).

   (b) Déterminez $g(t)$ lorsqu'à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs ($g(0) = 1$).

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ \begin{cases} (\forall t \geqslant 0)\ u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.
   Démontrez que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3)\ \begin{cases} (\forall t \geqslant 0)\ h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donnez les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

   et déduisez-en l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

1) (a) Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{t/4}$, où C est une constante réelle.

   (b) La condition $g(0) = 1$ fixe la valeur de la constante : $g(0) = C = 1$. Donc : $(\forall t \in \mathbb{R})\ g(t) = e^{t/4}$.

   (c) $g(t) \geqslant 3 \iff e^{t/4} \geqslant 3 \iff t/4 \geqslant \ln 3 \iff t \geqslant 4\ln 3 \approx 4{,}39$.
   Ainsi la population de rongeurs aura triplé au bout de 5 ans[1].

2) (a) $u = \dfrac{1}{h}$, donc $u' = -\dfrac{h'}{h^2}$. Ainsi, u vérifie (E_2) si et seulement si h vérifie

$$\begin{cases} (\forall t \geqslant 0)\ -\dfrac{h'(t)}{[h(t)]^2} = \dfrac{1}{4h(t)} - \dfrac{1}{12[h(t)]^2} \\ \dfrac{1}{h(0)} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (\forall t \geqslant 0)\ h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

   (b) La fonction constante $t \mapsto \dfrac{1}{3}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$, on sait que les autres solutions sont de la forme

$$t \mapsto \frac{1}{3} + Ce^{-t/4},\ C \in \mathbb{R}$$

[1] si l'on arrondit à l'unité, ce qui semblerait vouloir dire que ces scientifiques peu scrupuleux ne vont compter leurs bestioles qu'une fois par an… bel exemple de cruauté de la communauté des biologistes, une fois de plus !

De $h(0) = 1$, on déduit alors $C = \dfrac{2}{3}$, donc

$$h : t \mapsto \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{-t/4}\right)$$

d'où

$$u : t \mapsto \frac{3}{1 + 2e^{-t/4}}$$

(c) Dans ce modèle, la population des rongeurs ne dépassera jamais 300 individus, puisque $u(t)$ reste inférieur à 3 (le numérateur est plus grand que 1). 300 est en fait la population "limite", puisque

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 3$$

Voici enfin les courbes comparées des deux modèles :