DS n°5 : probabilités, exponentielle, géométrie dans l'espace

Exercice 1 : probabilités

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses, mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ème essai.

1) On appelle D_1 l'événement : « la clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2) On appelle D_2 l'événement : « la clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'événement D_2 se réalise, sachant que l'événement D_1 est réalisé.

   En déduire la probabilité de l'événement $D_1 \cap D_2$.

   On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3) Quelle est la probabilité de l'événement « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

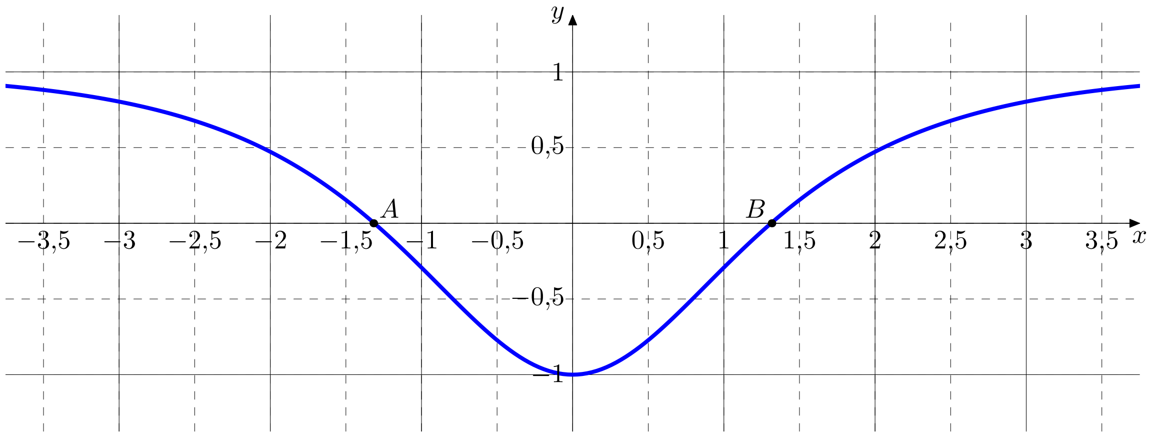
4) Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i;j)$ l'événement « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j » et $p\,(i;j)$ la probabilité de cet événement.

   (a) Calculer $p\,(2;4)$.

   (b) Calculer $p\,(4;5)$.

Exercice 2 : exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



1) La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'\,(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. Démontrer cette conjecture.

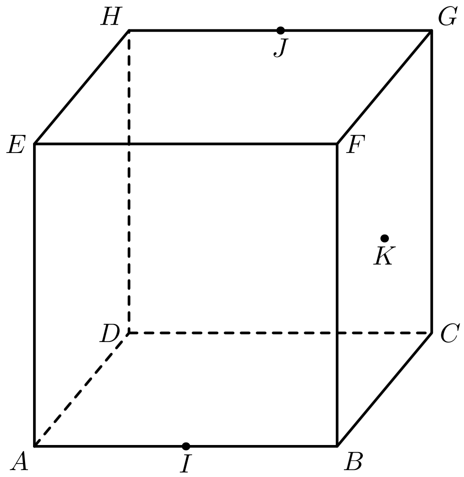
3) On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

   (a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. En déduire une valeur approchée de a.

   (b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans un cube $ABCDEFGH$, on désigne par I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[GH]$. K désigne le centre de la face $BCGF$. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) (a) Démontrer que le quadrilatère $DIFJ$ est un parallélogramme.

   Montrer que $DIFJ$ est en fait un losange, et que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

   (b) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(2; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (DIJ).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.

   (c) Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide $EDIFJ$.
   On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'une pyramide de hauteur h et de base $\mathscr{B}$ est donné par la formule : $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$.

2) Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ).

   (a) Donner une représentation paramétrique de Δ et prouver que K est un point de Δ.

   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de Δ et du plan (DIJ) et vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3) Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$$

   (a) Vérifier que $\mathscr{S}$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

   (b) Montrer que L est un point de $\mathscr{S}$.
   Quelle propriété géométrique relative à $\mathscr{S}$ et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?