

DS n°5 : probabilités, exponentielle, géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 : PROBABILITÉS

- 1) Il y a 2 clefs parmi les 5 qui n'ouvrent pas la porte, donc $P(D_1) = \frac{2}{5}$.
- 2) Dire que D_1 est réalisé revient à dire qu'on a utilisé une des clefs qui n'ouvrent pas la porte. Il en reste donc une défectueuse parmi les quatre que le professeur n'a pas encore employées, donc $P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{4}$.

$$\text{On en déduit : } P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

- 3) Si l'on ne veut pas utiliser l'arbre dessiné plus bas, on peut calculer la probabilité de l'événement « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » sous la forme :

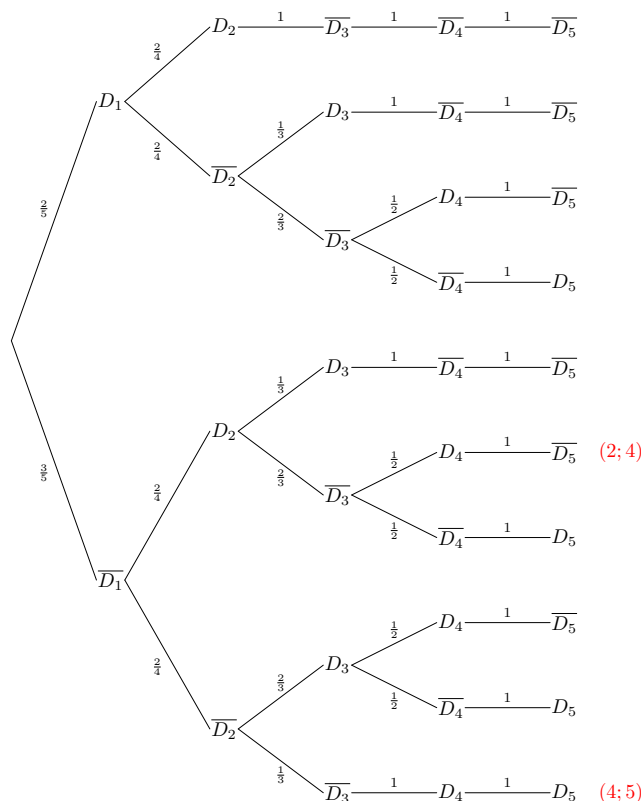
$$P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) \times P_{\overline{D_1} \cap \overline{D_2}}(D_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

- 4) Par lecture de l'arbre, on obtient :

(a) $p(2;4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{10}$,

(b) et $p(4;5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{10}$.

Il est en fait facile de se convaincre que tout les événements $(i;j)$ ont la même probabilité : ils sont déterminés par les positions des deux clefs "fautives" dans la série de cinq. Il y a $\binom{2}{5}$ façons de choisir ces deux positions, et elles sont clairement équiprobables.



EXERCICE 2 : EXPONENTIELLE

- 1) (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, le dénominateur $e^{2x} + 1$ ne s'annulant pas, et on a :

$$f'(x) = -4 \frac{e^x (e^{2x} + 1) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^x (e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

- (b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $e^{2x} - 1$, il est donc positif si et seulement si $e^{2x} > 1 = e^0$, soit si $x > 0$. Ainsi, f est bien strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 2) Dire que la droite d'équation $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ revient à dire que f est *paire*. Vérifions-le. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1 - \frac{4e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

- 3) (a) Dire que $A(a, 0)$ appartient à la courbe revient à dire que $f(a) = 0$, soit, en posant $c = e^a$:

$$f(a) = 0 \iff \frac{e^{2a} + 1 - 4e^a}{e^{2a} + 1} = 0 \iff c^2 - 4c + 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, dont on vérifie facilement qu'elles sont inverses l'une de l'autre. c correspond à la plus petite, et la calculatrice permet d'obtenir :

$$e^a = 2 - \sqrt{3} \iff a = \ln(2 - \sqrt{3}) \approx -1,317$$

- (b) Le signe de $f(x)$ est déterminé par le signe du "trinôme" $e^{2x} - 4e^x + 1$, il est positif sur $] -\infty; a[$ et $]a; +\infty[$, négatif sur $]a; -a[$, nul en a et $-a$.

EXERCICE 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

- 1) Dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les points dont on aura besoin ont pour coordonnées :

$$D(0; 1; 0), F(1; 0; 1), I(1/2; 0; 0), J(1/2; 1; 1), E(0; 0; 1), C(1; 1; 0), B(1; 0; 0), G(1; 1; 1)$$

- (a) $\overrightarrow{DI}(1/2; -1; 0)$ et $\overrightarrow{JF}(1/2; -1; 0)$, donc $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JF}$ et le quadrilatère $DIFJ$ est un parallélogramme. Pour montrer que $DIFJ$ est en fait un losange, il suffit de montrer que $DI = IF$. Or d'après ce qui précède, $DI = \sqrt{5}/2$, et $\overrightarrow{IF}(1/2; 0; 1)$, donc $IF = \sqrt{5}e1/2$.

L'aire de ce losange est le demi-produit de ses diagonales (faites un petit dessin pour vous convaincre). On trouve facilement $DF = \sqrt{3}$ et $IJ = \sqrt{2}$, donc le losange $DIFJ$ a pour aire $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

- (b) Pour montrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (DIJ) , il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{DI}(1/2; -1; 0)$ et $\overrightarrow{DJ}(1/2; 0; 1)$. On trouve facilement $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DI} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$.

Le plan (DIJ) a donc une équation de la forme $2x + y - z + d = 0$, et en exprimant le fait que $D(0; 1; 0)$ est dans ce plan, on obtient $d = -1$.

L'équation du plan (DIJ) est donc : $2x + y - z - 1 = 0$.

- (c) La distance du point E au plan (DIJ) est donnée par :

$$d(E, (DIJ)) = \frac{|2 \times 0 + 1 \times 0 - 1 \times 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Le volume de la pyramide $EDIFJ$ est, quant-à lui, donné par :

$$\mathcal{V}(EDIFJ) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(DIFJ) \times d(E, (DIJ)) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}$$

- 2) (a) Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et passe par E . Dire que $M \in \Delta$ revient à dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EM} = t\vec{n}$, soit :

$$(\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

K est le milieu de $[CF]$, ses coordonnées sont donc $(1; 1/2; 1/2)$, qu'on peut obtenir en posant $t = \frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique ci-dessus. K est donc bien un point de Δ .

- (b) Le point L appartient à Δ , donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de L sont $(2t; t; 1 - t)$. D'autre part, il appartient à (DIJ) , donc ses coordonnées vérifient l'équation de ce plan :

$$4t + t - (1 - t) - 1 = 0 \iff 6t - 2 = 0 \iff t = \frac{1}{3}$$

Les coordonnées de L sont donc : $(2/3; 1/3; 2/3)$.

Le centre de gravité du triangle BEG a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1+0+1}{3}; \frac{0+0+1}{3}; \frac{0+1+1}{3} \right)$$

qui sont bien les coordonnées de L .

- 3) (a) Transformons l'équation de $\mathcal{S}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0 \iff (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$\mathcal{S}$ est donc une sphère dont le centre a pour coordonnées $(1; 1/2; 1/2)$, et qui est donc le point K , et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

- (b) Les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{S}$, donc L est un point de $\mathcal{S}$.

On sait que la droite (LK) est orthogonale au plan (DIJ) , donc L est le projeté orthogonal de K sur (DIJ) , ce qui signifie que le plan (DIJ) est *tangent* à la sphère $\mathcal{S}$.