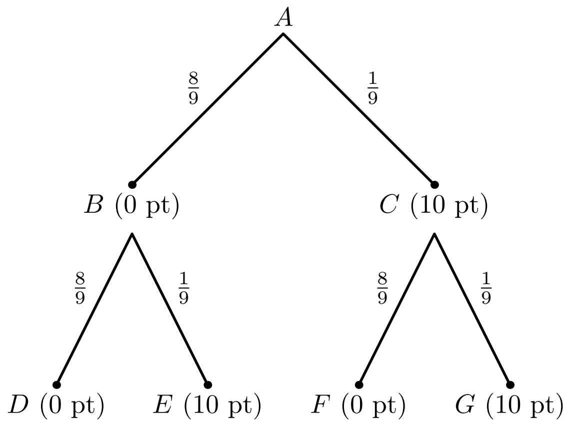
DS N°6 : PROBABILITÉS, SUITES, GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour les questions suivantes même s'il n'a pas été démontré. Le barème tiendra compte du fait que le sujet est long, appliquez-vous donc à faire en priorité tout ce que vous savez faire.

EXERCICE 1 : PROBABILITÉS

Un joueur lance une bille qui part de A, puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.
On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie, c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1) Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
   (c) Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2) Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 2 : SUITES RÉELLES

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$, et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Représenter sur un graphique d'unité $4cm$ la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$, la droite d'équation $y = x$, le point $A\,(2;0)$.
   Compléter ce graphique avec les constructions permettant d'obtenir sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Démontrer que si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.
   (d) Étudier la monotonie de la suite (u_n) ainsi que sa convergence.

2) (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

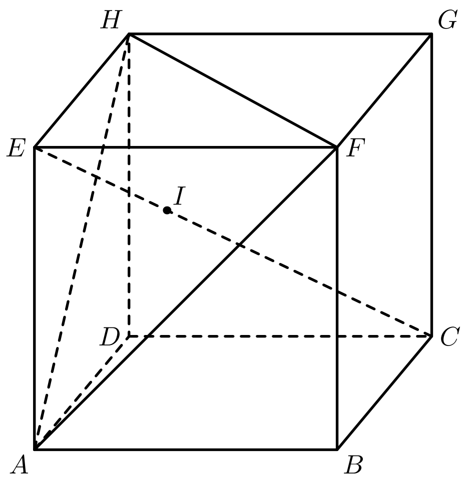
(b) ⋆ La suite (v_n) est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi, $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = 1{,}2 + 7\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}$, et en déduire que la limite de la suite (v_n) est un nombre rationnel r que l'on déterminera.

3) La suite (u_n) définie dans la première partie et la suite (v_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

EXERCICE 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1.
On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1) On se place dans le repère $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$$A\,(1;0;0)\,,\ B\,(1;1;0)\,,\ C\,(0;1;0)\,,\ D\,(0;,0;0)\,,\ E\,(1;0;1)\,,\ F\,(1;1;1)\,,\ G\,(0;1;1)\,,\ \text{et}\, H\,(0;0;1)$$

(a) Montrer que $\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (EC).

(b) Montrer que $x - y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (AFH).

(c) En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

(d) Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(e) Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour le triangle AFH ?

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre $EAFH$.