Corrigé du DS n°6

Exercice 1 : probabilités

1) (a) Il y a quatre chemin dans l'arbre, étiquetés par les feuilles d'arrivées. On a :

$$P(D) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{91},\ P(E) = \frac{8}{81} = P(F) \text{ et } P(G) = \frac{1}{81}$$

X prend trois valeurs, 0, 10 et 20, "$X = 0$" est l'événement D, "$X = 10$" l'événement $E \cup F$ et "$X = 20$" l'événement G, donc la loi de X est :

k	0	10	20
$P(X=k)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$

(b) $E(X) = \dfrac{64}{81} \times 0 + \dfrac{16}{81} \times 10 + \dfrac{1}{81} \times 20 = \dfrac{20}{9}$.

(c) On cherche la probabilité conditionnelle $P_{E\cup F}(F)$, elle vaut :

$$P_{E\cup F}(F) = \frac{P((E\cup F)\cap F)}{P(E\cup F)} = \frac{P(F)}{P(E\cup F)} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}} = \frac{1}{2}$$

2) (a) Si l'on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées, le fait que les parties soient identiques et indépendantes entraîne que Y suit une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{81}$. On a donc :

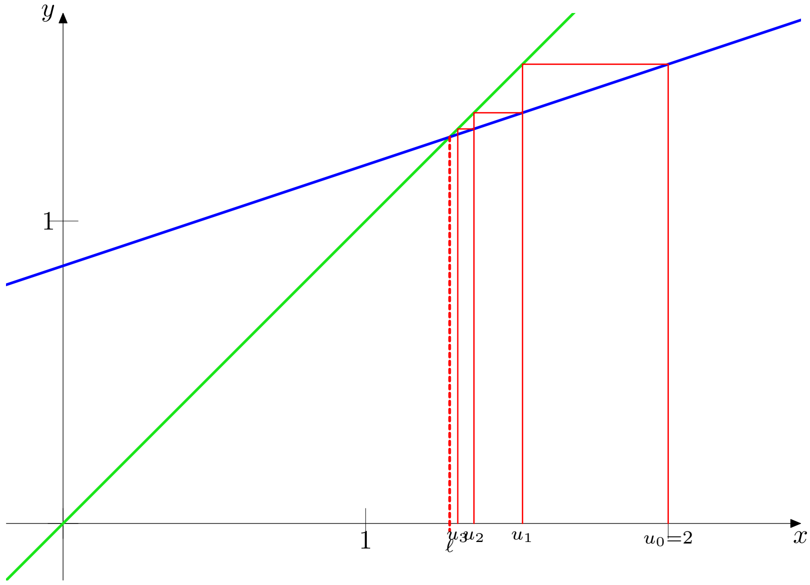
$$P(Y=2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{81}\right)^2\left(1-\frac{1}{81}\right)^{8-2} = 28 \times \frac{80^6}{81^8} \approx 0{,}004$$

(b) L'événement contraire de "gagner au moins une partie" est "ne gagner aucune partie". Ainsi :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{8}{0}\left(\frac{1}{81}\right)^0\left(1-\frac{1}{81}\right)^8 = 1 - \left(\frac{80}{81}\right)^8 \approx 0{,}095$$

Exercice 2 : suites réelles

1) (a) Le graphique semble suggérer que la suite (u_n) est décroissante, et converge vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites.



(b) Si (u_n) converge, en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$, sa limite ℓ doit vérifier l'équation

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{23}{27} \iff \ell = \frac{23}{18}$$

(c) Notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion : "$u_n \geqslant \frac{23}{18}$".
$\mathscr{P}_0$ est clairement vraie, et si $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain n, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geqslant \frac{1}{3} \times \frac{23}{18} + \frac{23}{27} = \frac{23}{18}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est encore vraie. L'assertion $\mathscr{P}_n$ est donc fondée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = \frac{23}{27} - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{23}{18} - u_n\right)$.
D'après ce qui précède, $\frac{23}{18} - u_n \leqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, et la suite (u_n) est décroissante.
Décroissante et minorée par $\frac{23}{18}$, la suite (u_n) est donc convergente, et d'après la première question, sa limite ne peut être que $\frac{23}{18}$.

2) (a) La somme proposée est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$, donc :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

(b) Il est clair que pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = 1{,}2 + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^{n+1}} = 1{,}2 + 7\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}$$

Or d'après ce qui précède, on peut écrire :

$$v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1{,}2 + \frac{7}{90} - \frac{7}{90} \times \left(\frac{1}{10}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$$

3) La suite (u_n) est décroissante, (v_n) est clairement croissante, elle convergent toutes deux vers la même limite, on a donc nécessairement $u_n \geqslant v_n$ pour tout n. (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

EXERCICE 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1) (a) Une représentation paramétrique de la droite (EC) est donnée par la relation vectorielle $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$, qui s'écrit, si $M\,(x;y;z)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

(b) Si l'on ne veut pas simplement vérifier que les coordonnées des points A, F et H vérifient bien l'équation donnée, on peut dire que si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation du plan (AFH), on doit avoir :

$$\begin{cases} A \in (AFH) \\ F \in (AFH) \\ H \in (AFH) \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$$

d'où l'équation proposée en prenant $d = -1$.

(c) I appartient à la fois au plan (AFH) et à la droite (EC). Ses coordonnées vérifient donc :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ 3t - 2 = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées de I sont donc $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, il est colinéaire au vecteur $\vec{n}\,(1;-1;1)$ qui est un vecteur normal du plan (AFH). Le point I est donc le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

(d) La distance du point E au plan (AFH) est donnée par la formule :

$$d\left(E,(AFH)\right)=\frac{|1-0+1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(e) $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ et $(0;1;1)$, on a donc bien $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AF}=0$, et (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

On montre de la même façon que $(AI)\perp(HF)$, donc I est l'orthocentre du triangle AFH. Mais comme il est facile de voir que celui-ci est un triangle équilatéral, I en est donc aussi le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit.

2) Un triangle équilatéral de coté a a pour aire $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Comme le triangle AFH a pour coté $\sqrt{2}$, il a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme les autres faces du tétraèdre $EAFH$ sont des triangles rectangles isocèles identiques d'aire $\frac{1}{2}$, $EAFH$ n'est pas de type 1 (et donc certainement pas de type 3).

$(EF)\perp(EAH)$, donc (EF) est perpendiculaire à toute droite de (EAH), donc en particulier à (AH). De même $(EH)\perp(AF)$ et $(EA)\perp(FH)$. Ainsi, $EAFH$ est de type 2.