DS n°7 : complexes, analyse

PROBLÈME 1 : COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Partie A : restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On suppose connus les résultats suivants :

- pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $A \neq C$ et $A \neq B$:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- soit z un nombre complexe et θ un nombre réel,

$$z = e^{i\theta} \iff (|z| = 1 \text{ et } \arg(z) = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm.
Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = iz + 4 + 4i$$

1) (a) Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.
   (b) Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.
   (c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2) On note A et B les points d'affixes respectives

$$a = 4 - 2i \quad \text{et} \quad b = -4 + 6i$$

   (a) Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
   (b) Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par f.

3) On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments $[AA']$, $[A'B]$, $[BB']$ et $[B'A]$.
   (a) Déterminer m. On admettra que $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ et $q = 1 - i$.
   (b) Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.
   (c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$.
   En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

4) Démontrer que les droites $(B'A)$ et (ΩN) sont perpendiculaires.

Problème 2 : analyse

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E)\,:\,y' + y = e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) Résoudre l'équation différentielle $(E')\,:\,y' + y = 0$.

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+k)\,e^{-x}$, où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1) Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

2) On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) Sur le graphique donné ci-dessous, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, ainsi que les noms des courbes, n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

   - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$,
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x+k)\,e^{-x}$, pour un certain nombre réel k.

   (a) Identifier les courbes et les nommer sur le graphique.

   (b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chaque des axes.

4) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.