CORRIGÉ DU DS N°7 : COMPLEXES, ANALYSE

PROBLÈME 1 : COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Partie A : restitution organisée de connaissances

Soit $M \neq \Omega$. Dire que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω et d'angle α revient à dire que

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha \,(\operatorname{mod} 2\pi) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha \,(\operatorname{mod} 2\pi) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \alpha \,(\operatorname{mod} 2\pi) \end{array}\right.$$

$$\iff \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1.e^{i\alpha} \iff z'-\omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$$

Cette relation étant encore valable lorsque M est en Ω (auquel cas M' est aussi en Ω), le résultat en découle.

Partie B

1) (a) On recherche les éventuels points fixes de f :

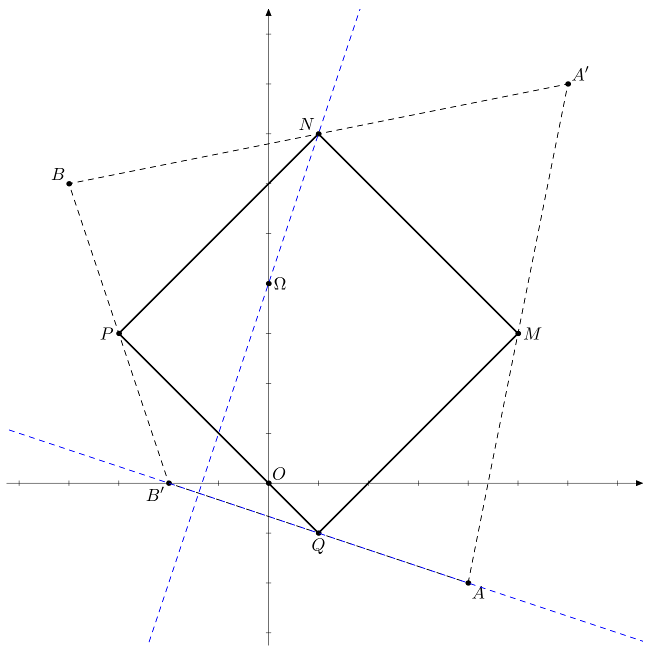
$$f(\Omega) = \Omega \iff z = iz + 4 + 4i \iff z(1-i) = 4+4i \iff z = \frac{4+4i}{1-i} = \frac{(4+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 4i$$

L'unique point fixe de f est donc le point Ω d'affixe $4i$.

(b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' - 4i = iz + 4 = iz - 4i^2 = i(z-4i)$.

(c) L'écriture complexe de f est donc de la forme $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$, avec ici $\omega = 4i$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, f est donc une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ (autrement dit, un quart de tour direct de centre Ω).

2) (a) La figure complétée (et pas vraiment palpitante) :



(b) Si on appelle a' et b' les affixes respectives de A' et B', on a :

$$a' = i(4-2i) + 4 + 4i = 6 + 8i \quad \text{et} \quad b' = i(-4+6i) + 4 + 4i = -2$$

3) (a) L'affixe du milieu M de $[AA']$ est la moyenne des affixes des extrémités A et A' du segment :

$$m = \frac{a+a'}{2} = \frac{4-2i+6+8i}{2} = 5+3i$$

(b) Les affixes de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont :

$$n-m=1+7i-(5+3i)=-4+4i \quad \text{et} \quad p-q=-3+3i-(1-i)=-4+4i$$

Ainsi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, donc $MNPQ$ est un parallélogramme.

(c) $\dfrac{n-p}{q-p}=\dfrac{4+4i}{4-4i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=i.$
On peut donc affirmer que N est l'image de Q dans le quart de tour direct de centre P. Une autre manière de voir ceci :

- $\left|\dfrac{n-p}{q-p}\right|=1$, soit $PN=PQ$, i.e. $MNPQ$ est un losange,
- $\arg\left(\dfrac{n-p}{q-p}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, soit $(PN)\perp(PQ)$ et $MNPQ$ est un rectangle.

Pour résumer : $MNPQ$ est un *carré*.

4) Les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{\Omega N}$ sont

$$a-b'=6-2i \quad \text{et} \quad n-\omega=1+3i$$

On constate que :

$$\frac{a-b'}{n-\omega}=\frac{6-2i}{1+3i}=\frac{(6-2i)(1-3i)}{10}=-2i$$

Ainsi $\left(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{B'A}\right)=\arg\left(\dfrac{a-b'}{n-\omega}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\ (\operatorname{mod} 2\pi)$, donc les droites $(B'A)$ et (ΩN) sont bien perpendiculaires.

Problème 2 : analyse

Partie A

1) Si $u(x)=xe^{-x}$, alors $u'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$, donc $u'(x)+u(x)=e^{-x}$, i.e. u est une solution de l'équation différentielle (E).

2) L'ensemble des solutions de l'équation (E') est $\mathscr{S}_0=\left\{x\mapsto Ce^{-x},\, C\in\mathbb{R}\right\}$.

3) Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
v \text{ solution de } (E) &\iff (\forall x\in\mathbb{R})\ v'(x)+v(x)=e^{-x}\\
&\iff (\forall x\in\mathbb{R})\ v'(x)+v(x)=u'(x)-u(x)\\
&\iff (\forall x\in\mathbb{R})\ v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0\\
&\iff (v-u)'+(v-u)=0\\
&\iff v-u \text{ solution de } (E')
\end{aligned}$$

4) Ainsi toute solution de (E) est somme de u et d'une solution de (E'), l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto xe^{-x}+Ce^{-x},\, C\in\mathbb{R}\right\}$$

5) Soit $g: x\mapsto xe^{-x}+Ce^{-x}$.

$$g(0)=2 \iff 0e^{-0}+Ce^{-0}=2 \iff C=2$$

Ainsi l'unique solution g de (E) telle que $g(0)=2$ est $g: x\mapsto (x+2)\,e^{-x}$.

Partie B

1) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_k'(x)=e^{-x}-(x+k)\,e^{-x}=(1-k-x)\,e^{-x}$. Le tableau de variations de f_k est donc :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

La fonction f_k admet donc bien un maximum en $x=1-k$.

2) Les coordonnées de M_k sont $(1-k; f_k(1-k))$, et

$$f_k(1-k) = (1-k+k)\,e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}$$

Les coordonnées de M_k vérifient donc bien l'équation $y = e^{-x}$, et M_k se trouve donc bien sur la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) (a) $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est la courbe pleine.
La fonction f_k est, d'après ce qui précède, croissante puis décroissante, c'est donc la courbe en pointillés.

(b) $e^{-0} = 1$, donc le point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; 1)$, donc une graduation sur l'axe des ordonnées correspond à une unité.
D'autre part, $f_k(0) = k$, et le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_k$ a pour coordonnées $(0; 2)$, donc $k = 2$.
Enfin, la fonction f_2 prend son maximum au point d'abscisse $1 - 2 = -1$, donc une graduation sur l'axe des abscisses correspond aussi à une unité.

4) Dérivons $u : x \mapsto x + 2$ et primitivons $x \mapsto e^{-x}$:

$$\int_0^2 (x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\,e^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -4e^{-2} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^2 = 3 - 5e^{-2}$$

Cette intégrale est l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_k$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$.