

IC n°3 : limites de suites

Les questions marquées d'une (*) sont supposées un peu plus difficiles. Il est conseillé de faire d'abord le reste du devoir avant d'y consacrer du temps.

COURS

1) Donner la définition de : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

2) (a) Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 3$$

(b) Même question avec les conditions :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = -\infty$$

EXERCICES

Exercice 1

Donner (avec justification) la limite des suites :

$$u_n = \frac{n^4}{1789} - 17n^3 + 6 \quad v_n = \frac{1 - 3n + n^2}{n^2 - n^3 \sqrt{n}} \quad (*) \quad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \quad (*) \quad y_n = -3^n + (-2)^n$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 3) En déduire que (u_n) converge, et préciser sa limite.

Exercice 3 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$.

- 1) (a) De combien de termes u_n est-il la somme ?
(b) Quelle est la limite de chacun de ces termes, quand n tend vers l'infini ? Peut-on en déduire la convergence de (u_n) ?
- 2) (a) Montrer que pour tout k entier compris entre 1 et n , $\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$.
(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.
(c) En déduire la convergence de la suite (u_n) , et préciser sa limite.