Corrigé du devoir commun de $1^{ère}$S 2007

Exercice 1 : produit scalaire

1. De $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, on tire $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{15}{5 \times 6} = \dfrac{1}{2}$.
   Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est donc 60°.
2. En prenant le carré scalaire de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, on obtient :
$$BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 36 + 25 - 30 = 31$$
   On en déduit $BC = \sqrt{31}$.
3. Avec la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 36 - 15 = 21$$
   On a donc :
$$21 = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|CA\| \, \|CB\| \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 6\sqrt{31}\cos\left(\widehat{BCA}\right)$$
   d'où $\cos\left(\widehat{BCA}\right) = \dfrac{21}{6\sqrt{31}} = \dfrac{7}{2\sqrt{31}}$.
   La calculatrice donne alors $\text{mes}\left(\widehat{BCA}\right) = \arccos\left(\dfrac{7}{2\sqrt{31}}\right) \approx 51°$.
4. L'aire du triangle ABC est
$$\mathscr{A} = \frac{AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}}{2} = \frac{5 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$
   On en déduit les longueurs des hauteurs issues de A, B et C :
   - $\mathscr{A} = \dfrac{BC \times h_A}{2}$ donc $h_A = \dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \dfrac{15\sqrt{93}}{31}$,
   - $\mathscr{A} = \dfrac{AC \times h_B}{2}$ donc $h_B = \dfrac{15\sqrt{3}}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$,
   - et $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times h_C}{2}$ donc $h_C = \dfrac{15\sqrt{3}}{5} = 3\sqrt{3}$.

Exercice 2 : suites et géométrie

1. (a) On trouve facilement, avec $p_n = c_n \times \lambda_n$:

n	c_n	λ_n	p_n
0	3	2	6
1	12	$\frac{2}{3}$	8
2	48	$\frac{2}{9}$	$\frac{32}{3}$

   (b) À chaque transformation, le nombre de cotés est multiplié par 4, donc $c_{n+1} = 4c_n$. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 4, de premier terme $c_0 = 3$. On a donc $c_n = 3 \times 4^n$.
   (c) À chaque transformation, la longueur des cotés est divisée par 3, donc $\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{3}$. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, de premier terme $\lambda_0 = 2$, d'où $\lambda_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   (d) $p_n = c_n \times \lambda_n = 6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
   (e) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme 6, de raison $\frac{4}{3}$, supérieure à 1. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.
2. (a) La hauteur d'un triangle équilatéral de coté a est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du triangle équilatéral de départ est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
   L'aire du triangle F_0 est donc $\sqrt{3}$.
   Pour passer de F_0 à F_1, on ajoute 3 triangles de coté $\frac{2}{3}$, donc d'aire $\frac{\sqrt{3}}{9}$. L'aire totale augmente donc de $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
   Pour passer de F_1 à F_2, on rajoute 12 triangles de coté $\frac{2}{9}$, donc d'aire $\frac{\sqrt{3}}{81}$. L'aire totale augmente donc de $a_2 = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.
   Enfin, pour passer de F_2 à F_3, on rajoute sur chaque coté de F_2 (il y en a $c_2 = 48$) un triangle de coté $\lambda_3 = \frac{2}{27}$, donc d'aire $\frac{\sqrt{3}}{729}$. L'aire totale augmente donc de $a_3 = \frac{16\sqrt{3}}{243}$.

(b) On “voit” apparaître la formule générale : pour passer de F_{n-1} à F_n, on ajoute c_{n-1} triangles de coté λ_n. Ainsi :

$$a_n = c_{n-1}\frac{4\lambda_n^2\sqrt{3}}{4} = 3 \times 4^{n-1} \times \left(2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

(c) s_0 est l'aire du triangle initial, soit $s_0 = \sqrt{3}$. Pour $n \neq 0$, $s_n = s_0 + a_1 + \cdots + a_n$, d'où :

$$s_n = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$$

(d) La somme entre parenthèses est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$, donc :

$$s_n = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$

La première partie de la somme est égale à

$$s = \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

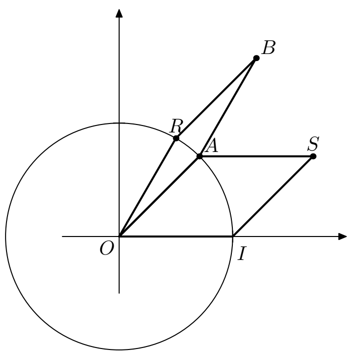
L'autre terme est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$, donc de limite nulle.

La limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $s = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

Notons pour terminer qu'une ligne fermée de longueur tendant vers l'infini délimite un domaine dont l'aire reste bornée. On rencontre de nombreux paradoxes de ce genre lorsqu'on étudie les *fractales* (qui sont des figures obtenues comme limite de la l'application réitérée d'un procédé géométrique ou numérique).

Exercice 3 : angles orientés et repérage polaire

1. Voici la figure de l'exercice, avec les points B et R qui serviront dans la question 4.



2. (a) $x_A = 1 \times \cos\dfrac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_A = 1 \times \sin\dfrac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   De $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$, on tire $\overrightarrow{OS}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d'où $S\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   (b) $OS = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

3. (a) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$, donc $OASI$ est un parallélogramme. Comme $OI = OA = 1$, c'est aussi un losange. On a donc $\widehat{IOS} = \frac{\pi}{8}$.

   (b) D'après ce qui précède, les coordonnées polaires de S sont $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8}\right)$, et ses coordonnées cartésiennes sont $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On en déduit :

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

4. (a) $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$ implique que $OABR$ est un parallélogramme, puis $OA = OR$ montre que c'est un losange.

   (b) À partir des coordonnées polaires $\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$ de R, on obtient ses coordonnées cartésiennes : $R\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Puis, avec $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA}$, on obtient les coordonnées cartésiennes de B : $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$.

(c) (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOR}$, donc $\widehat{IOB} = \frac{7\pi}{24}$.
Avec $OB = \sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$, on déduit les coordonnées polaires de B : $\left(\sqrt{2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}} ; \frac{7\pi}{24}\right)$.

(d) On en déduit :

$$\cos\left(\tfrac{7\pi}{24}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\tfrac{7\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}}$$

Exercice 4 : études de fonctions et (toujours !) géométrie

1. (a) $g'(x) = 12x^2 + 18x + 6 = 6\left(2x^2+3x+1\right)$. C'est un polynôme du second degré, de discriminant $3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$, et de racines $\dfrac{-3\pm 1}{4}$. Aucune de ces racines n'est dans l'intervalle $[0;1]$, donc g' est strictement positive sur cet intervalle.
g est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

(b) Cette stricte croissance de g sur $[0;1]$ entraîne que pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) \geqslant g(0) = 3 > 0$. Ainsi g ne prend que des valeurs strictement positives sur cet intervalle.

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	3	$\nearrow$	22

2. (a) On vérifie immédiatement que $f' = g$. g étant strictement positive sur $[0;1]$, f y est strictement croissante. Son tableau de variations est donc :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	8

(b) f est dérivable sur $[0;1]$, prend des valeurs de signes contraires aux extrémités de cet intervalle, donc elle doit s'annuler au moins une fois à l'intérieur de cet intervalle.
La stricte croissance de f sur $[0;1]$ garantit l'unicité.

(c) On montre facilement en développant que $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x-1\right) = f(x)$.
Le trinôme x^2+x+2 a un discriminant strictement négatif, il ne peut donc pas s'annuler. Par contre, le trinôme x^2+2x-1 a deux racines, $-1\pm\sqrt{2}$, mais seule $\sqrt{2}-1 \approx 0{,}41$ appartient à l'intervalle $[0;1]$.

3. (a) Lorsque les deux cercles sont tangents, I, J et le point de contact sont alignés. Dans le triangle rectangle IBJ, on doit alors avoir :

$$IB^2 + BJ^2 = IJ^2 \iff (1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2 \iff 2-2x-2y = 2xy \iff y = \frac{1-x}{1+x}$$

(b) La somme des aires des deux disques est égale à $\pi\left(x^2+y^2\right) = \pi\left(x^2 + \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\right)$.

4. (a) $h'(x) = 2x + 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right) = \dfrac{2x(1+x)^3 - 4(1-x)}{(1+x)^3} = \dfrac{2f(x)}{(1+x)^3}$.

(b) $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ sur $[0;1]$, donc le tableau de variations de h est

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$6-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

(c) On lit simplement sur le tableau de variations le minimum de h sur l'intervalle $[0;1]$, égal à $6-4\sqrt{2} \approx 0{,}34$.

(d) La somme des aires des deux disques, égale à $\pi h(x)$, est donc minimale lorsque $x = \sqrt{2}-1$, elle est alors égale à $\pi\left(6-4\sqrt{2}\right) \approx 1{,}08$.
Pour cette valeur de x, on a

$$y = \frac{1-\left(\sqrt{2}-1\right)}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 = x$$