Devoir commun 1reS 2007

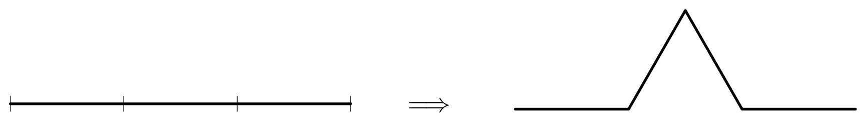
Exercice 1 : produit scalaire

Soit ABC un triangle, tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15$.

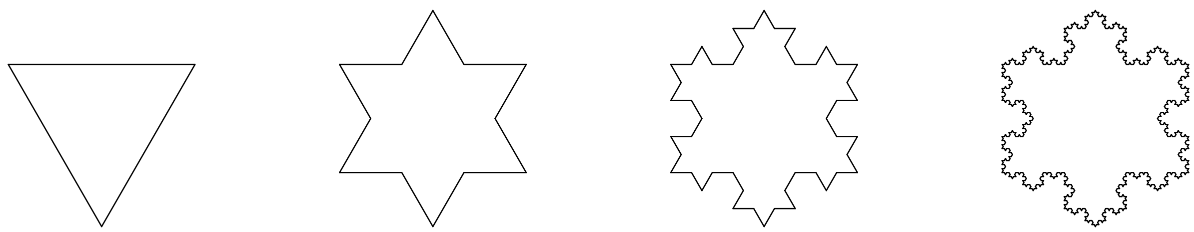
1. Calculer, en degrés, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. En utilisant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer BC^2 puis BC.
3. Démontrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 21$. En déduire une valeur approchée, à un degré près, de l'ange $\widehat{BCA}$.
4. Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire les longueurs des trois hauteurs de ce triangle.

Exercice 2 : suites et géométrie

On considère un triangle équilatéral de côté 2. On applique à chacun des côtés la transformation suivante : on partage le côté en trois parties égales, puis on construit sur le segment du milieu un triangle équilatéral « tourné vers l'extérieur ». On supprime alors la base de ce triangle. Voici une illustration de cette transformation sur l'un des trois côtés :



On note F_0 le triangle de départ, F_1 la première figure (l'étoile), et plus généralement F_n le polygone obtenu après n transformations. Ci-dessous, on a représenté F_0, F_1, F_2 et F_4.



F_0 F_1 F_2 ... F_4

Pour le polygone F_n, on désigne par :

c_n le nombre de ses côtés, λ_n la longueur de chaque côté, p_n son périmètre et s_n son aire.

1. (a) Déterminer c_0, c_1, c_2, λ_0, λ_1, λ_2 puis p_0, p_1, p_2.
   (b) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire c_n en fonction de n.
   (c) Exprimer λ_{n+1} en fonction de λ_n. En déduire λ_n en fonction de n.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel n, $p_n = 6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
   (e) Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On note a_n la surface *ajoutée* à chaque étape (*i.e.* la différence des aires de F_n et F_{n-1}).
   (a) Déterminer a_1 et a_2.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.
   (c) En déduire que $s_0 = \sqrt{3}$, et pour $n > 0$, $s_n = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.
   (d) Calculer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : angles orientés et repérage polaire

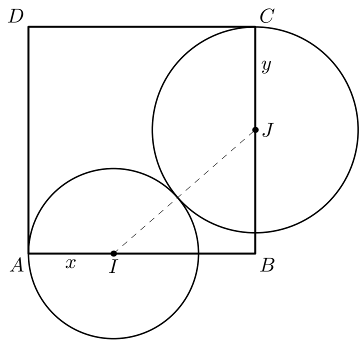
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Placer les points A de coordonnées *polaires* $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées *cartésiennes* de A puis de S.
   (b) Calculer OS.
3. (a) Déterminer la nature du quadrilatère $OASI$ et en déduire une mesure de l'angle $\widehat{IOS}$.
   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. (a) Soient R tel que OIR soit équilatéral direct (c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR}\right) = \dfrac{\pi}{3}$) et B tel que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$. Montrer que $OABR$ est un losange.
   (b) Donner les coordonnées cartésiennes de R, et en déduire celles de B.
   (c) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IOB}$, puis les coordonnées polaires de B.
   (d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)$.

Exercice 4 : études de fonctions et (toujours !) géométrie

1. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 3$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) Montrer que g garde un signe constant strict sur $[0; 1]$.
2. Soit maintenant f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 2$.
   (a) Montrer que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variations de f.
   (b) Montrer que f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$. On note α l'unique solution sur $[0; 1]$ de l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Montrer que $f(x) = \left(x^2 + x + 2\right)\left(x^2 + 2x - 1\right)$. En déduire que $\alpha = \sqrt{2} - 1$.
3. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. I est un point du segment $[AB]$, on note x la longueur AI. On trace le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre I passant par A.

   J est un point du segment $[BC]$, tel que le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre J passant par C soit tangent à $\mathscr{C}_1$. On note y la longueur CJ.



   (a) Montrer que $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ (on pourra considérer le triangle IJB, et utiliser le fait que si deux cercles sont tangents, leur unique point de contact est aligné avec leurs centres respectifs).
   (b) Montrer que la somme des aires des deux disques est égale à $\pi\left(x^2 + \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^2\right)$.
4. Soit h la fonction définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = x^2 + \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^2$.
   (a) Montrer que $h'(x) = 2\dfrac{f(x)}{(1 + x)^3}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de h.
   (c) Montrer que h admet un minimum en α, et calculer ce minimum.
   (d) En déduire la valeur de x pour laquelle la somme des aires des deux disques de la partie 3 est minimale, calculer cette aire minimale, et montrer que pour cette valeur de x, on a $y = x$.