Correction DM n°7 : fonctions, limites, asymptotes et plus si affinité

TD 2 p.125 : Étude des fonctions homographiques

1. **Généralités**

   (a) Si $c = 0$, on a $f(x) = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$, on reconnaît une fonction affine.

   (b) Supposons $ad - bc = 0$.

   - Si $d = 0$, alors comme par hypothèse $c \neq 0$, nécessairement $b = 0$, et $f(x) = \dfrac{ax}{cx}$. On peut alors bien dire que $f(x) = \dfrac{a}{c}$ pour tout $x \neq -\dfrac{d}{c} = 0$.
   - Si $d \neq 0$, $ad - bc = 0$ peut s'écrire $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$, et en appelant λ cette valeur commune, on a $a = \lambda c$, et $b = \lambda d$. On a donc :
   $$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda cx + \lambda d}{cx+d} = \lambda \frac{cx+d}{cx+d}$$
   ce qui permet encore de conclure que $f(x) = \lambda = \dfrac{a}{c}$ pour tout $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

   Dans la suite, ces deux hypothèses sont donc exclues.

2. **Étude de quelques fonctions harmoniques**

   (a) i. Soit d'abord $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x-4}$. Cette fonction est définie, et dérivable, sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sa dérivée est :
   $$f'(x) = \frac{3(2x-4) - 2(3x-4)}{(2x-4)^2} = \frac{-4}{(2x-4)^2}$$
   Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-4}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
   et de même $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. On en déduit que la droite horizontale d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   D'autre part,
   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^+} 3x-4 = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} 2x-4 = 0^+ \end{array}\right\} \lim_{x\to 2^+} \frac{3x-4}{2x-4} = +\infty$$
   et de même $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{3x-4}{2x-4} = -\infty$. Ainsi la droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$3/2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3/2$

   La courbe représentative de cette fonction est présentée à la figure 1.

   ii. L'énoncé souhaite nous faire calculer $\dfrac{1}{2}(f(2+h) + f(2-h))$, mais il est plus simple d'effectuer directement le changement de repère qui sera de toute façon demandé dans la question suivante.
   Notons donc (X, Y) les coordonnées du point M dans le repère $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a :
   $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \iff x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} + \frac{3}{2}\vec{\jmath} + X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} \iff \begin{cases} x = 2 + X \\ y = \frac{3}{2} + Y \end{cases}$$
   Utilisons ces *formules de changement de repère* pour obtenir l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le nouveau repère :
   $$Y + \frac{3}{2} = y = f(x) = f(2+X) = \frac{3(2+X) - 4}{2(2+X) - 4} = \frac{3X+2}{2X} = \frac{3}{2} + \frac{1}{X}$$
   d'où $Y = \dfrac{1}{X} = \widetilde{f}(X)$. La fonction $\widetilde{f}$ est *impaire*, donc I, centre du nouveau repère, est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

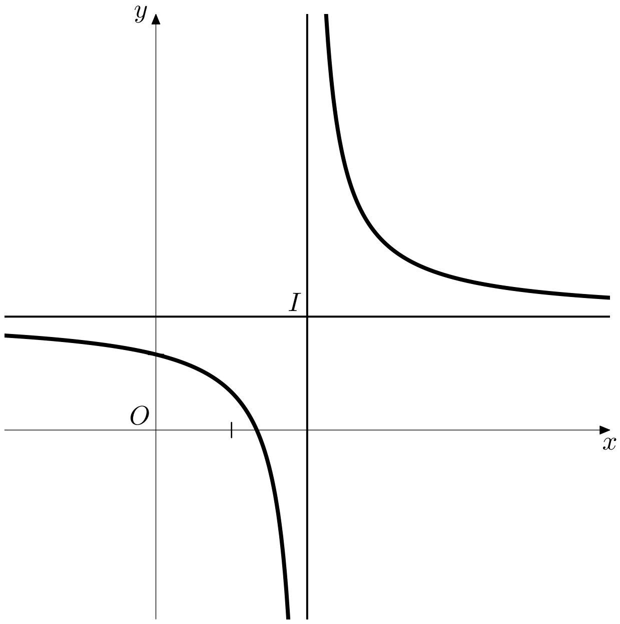

FIG. 1: Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{2x-4}$

iii. De plus, l'équation $Y = \dfrac{1}{X}$ est l'équation d'une *hyperbole équilatère* (i.e. une hyperbole dont les deux asymptotes sont perpendiculaires).

(b) On va étudier sommairement les deux prochaines fonctions, la répétition n'ayant pas vraiment d'autre intérêt que de nous convaincre qu'on ferait mieux de faire les calculs dans le cas général.

i. Ici $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{2x+3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{3(2x+3) - 2(3x-5)}{(2x+3)^2} = \frac{19}{(2x+3)^2}$$

Les limites :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to-\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$$

ce qui indique la présence de deux asymptotes, l'une horizontale d'équation $y = \dfrac{3}{2}$, une autre verticale d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$.

La courbe est représentée figure 2.

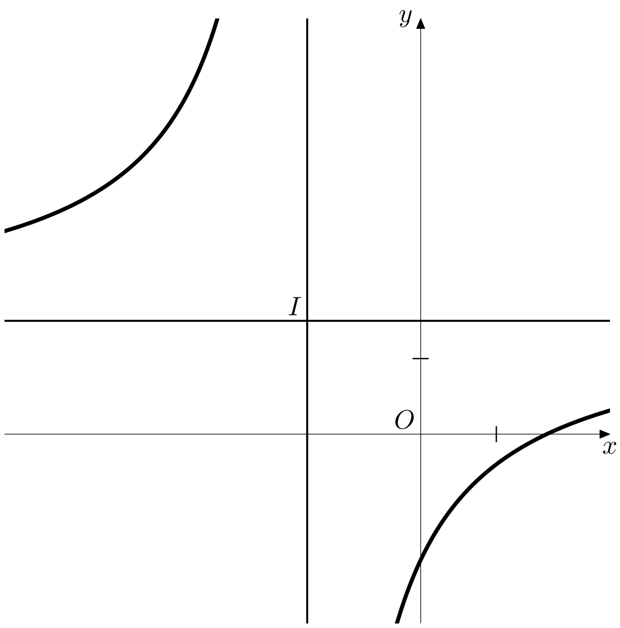

FIG. 2: Courbe représentative de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{3x-5}{2x+3}$

ii. Le point d'intersection I des deux asymptotes a pour coordonnées $(3/2, -3/2)$. Effectuons le changement de repère : $\begin{cases} x = -3/2 + X \\ y = 3/2 + Y \end{cases}$.

$$Y + 3/2 = y = f(x) = f(-3/2 + X) = \frac{3(-3/2 + X) - 5}{2(-3/2 + X) + 3} = \frac{3X - 19/2}{2X} = \frac{3}{2} - \frac{19}{4X}$$

L'équation de $\mathscr{C}_f$ dans le nouveau repère est donc $Y = -\dfrac{19}{4X} = \widetilde{f}(X)$. La fonction $\widetilde{f}$ étant impaire, on en déduit bien que I est centre de symétrie de la courbe.

(c) Essayons d'aller encore plus vite. Ici, on a :

$$f(x) = \frac{-x + 3}{x - 2} = \frac{-x + 2 + 1}{x - 2} = -1 + \frac{1}{x - 2}$$

Donc il semble tout indiqué de faire une translation de repère en prenant pour nouvelle origine $I(2, -1)$, ce qui correspond à la nouvelle équation $Y = \dfrac{1}{X}$. Tout ce qu'on peut dire de la courbe représentative de cette fonction découle alors de nos connaissances de la fonction inverse, n'est-il pas ? Voir figure 3.

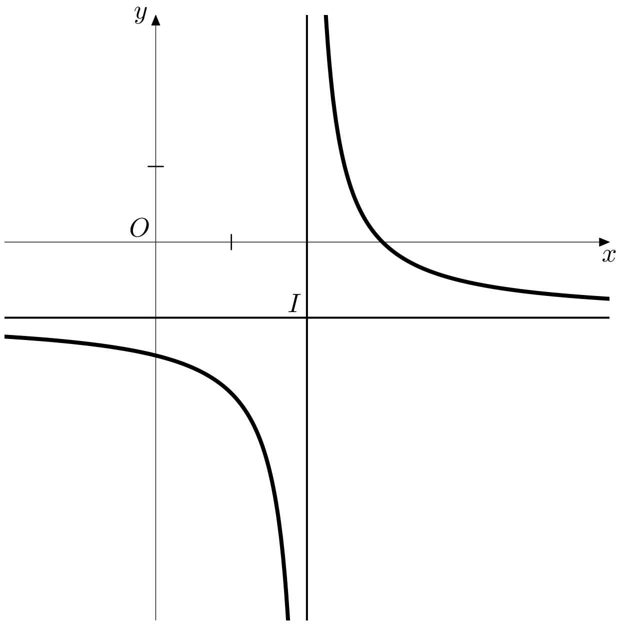

FIG. 3: Courbe représentative de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-x + 3}{x - 2}$

3. **Cas général**

(a) Si $a = 0$, b ne peut être nul, le théorème sur la limite en l'infini d'une fonction rationnelle permet alors d'écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{b}{cx + d} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{cx} = 0 = \frac{a}{c}$$

Si a n'est pas nul, le même théorème permet d'écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

La limite en $-\infty$ est la même, on en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{a}{c}$.

La limite du dénominateur $cx + d$ en $-\dfrac{d}{c}$ est 0, alors que le numérateur prend la valeur $-a\dfrac{d}{c} + b = \dfrac{bc - ad}{c}$, différente de 0. $f(x)$ a donc pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. On en déduit que la droite verticale d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

(b) Soit $I\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ le point d'intersection des asymptotes. Cherchons l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(I; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les équations du changement de repère sont : $\begin{cases} x = -d/c + X \\ y = a/c + Y \end{cases}$. On a donc :

$$\frac{a}{c} + Y = y = f(x) = f\left(-\frac{d}{c} + X\right) = \frac{a\left(-\frac{d}{c} + X\right) + b}{c\left(-\frac{d}{c} + X\right) + d} = \frac{aX + \frac{bc - ad}{c}}{cX} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 X}$$

L'équation de $\mathscr{C}_f$ dans le nouveau repère est donc $Y = \dfrac{bc - ad}{c^2}\dfrac{1}{X} = \dfrac{\alpha}{X}$. C'est donc une hyperbole, de centre I.

Ex 95 p.135 : Parabole asymptote

1. D'après le théorème sur la limite d'une fonction rationnelle en l'infini, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

2. a) On peut effectuer une identification :

$$ax^2+bx+c+\frac{dx+e}{x^2-1} = \frac{ax^4+bx^3+(c-a)x^2+(d-b)x+e-c}{x^2-1}$$

donc cette quantité est égale à $f(x)$ si et seulement si

$$a=1,\, b=0,\, c-a=0,\, d-b=0,\, e-c=0 \iff a=c=e=1,\, b=d=0$$

On peut aussi ruser :

$$\frac{x^4}{x^2-1} = \frac{x^4-1+1}{x^2-1} = \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)+1}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

b) On a donc $(f-g)(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, quantité qui a bien pour limite 0 en l'infini.
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2+1$.

c) $(f-g)(x)$ est du signe de $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, il est positif sauf entre -1 et 1. Ainsi, $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, en dessous sur l'intervalle $]-1,1[$.

d) Cherchons les limites en 1 :

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 1} x^4 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 = 0^+\end{array}\right\} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$$

On a de même $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^4}{x^2-1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^4}{x^2-1} = -\infty$.
On a donc deux asymptotes verticales d'équation $x=-1$ et $x=1$.

3. Commençons par constater que f est paire, ce qui permet de limiter son étude à $[0,1[\cup]1,+\infty[$. La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{4x^3\left(x^2-1\right)-2x^5}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

et sa courbe, figure 4, ainsi que ses tangentes horizontales, sa parabole asymptote et ses deux droites asymptotes verticales.

Ex 106 p.137 : Familles de cercles

1 a) $f(x)-(1-x) = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$. La droite Δ d'équation $y = 1-x$ est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) $f(x)-(1-x) = \dfrac{1}{x}$ est positif sur $]0,+\infty[$, donc $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ sur cet intervalle. De la même façon, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]-\infty,0[$.

2 a) $f'(x) = -1-\dfrac{1}{x^2}$, ce qui suffit pour voir que f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
De plus, il est facile de vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Les limites en $+$ et $-\infty$ se déduisent de l'existence d'une asymptote oblique.

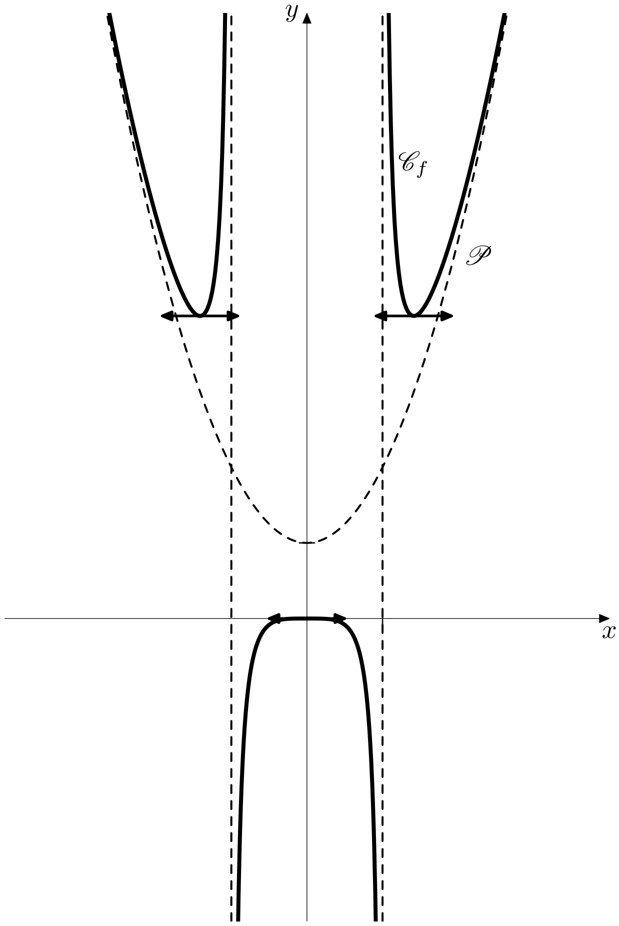

FIG. 4: La courbe d'équation $y = 1 - x + \dfrac{1}{x}$, et sa parabole asymptote

Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

b) D'après le tableau de variations de f, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'autre sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et ce quelle que soit la valeur de $m \in \mathbb{R}$.

3 a) L'équation $f(x) = m$ équivaut à :

$$1 - x + \frac{1}{x} = m \iff \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x - x^2 + 1 = mx \end{array} \right. \iff x^2 - (1-m) - 1 = 0 \; [1]$$

puisque 0 n'est solution de cette dernière équation pour aucune valeur de m.

b) $H_1H_2^2 = (x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.
On en déduit que $H_1H_2^2 = (1-m)^2 + 4$, la somme $x_1 + x_2$ des racines de l'équation [1] étant $1 - m$, leur produit x_1x_2 valant -1.

4 a) Le centre de Γ_m est le milieu de $[H_1H_2]$, c'est le point de l'axe des abscisses d'abscisse $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1-m}{2}$.

Son rayon r est égal à $\dfrac{1}{2}H_1H_2$, donc $r^2 = \dfrac{1}{4}H_1H_2^2 = 1 + \dfrac{(1-m)^2}{4}$.

b) Une équation du cercle Γ_m est donc

$$\left(x - \frac{1-m}{2}\right)^2 + y^2 = r^2 \iff x^2 - (1-m)\,x + y^2 - 1 = 0$$

5 On constate sur la figure 5 que les cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 semblent tous passer par les points A et A' de coordonnées respectives $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

On peut le vérifier directement, en constatant que $(0, 1)$ et $(0, -1)$ vérifient l'équation de Γ_m quelle que soit la valeur de m, ou bien en raisonnant sur la forme de l'équation de Γ_m.

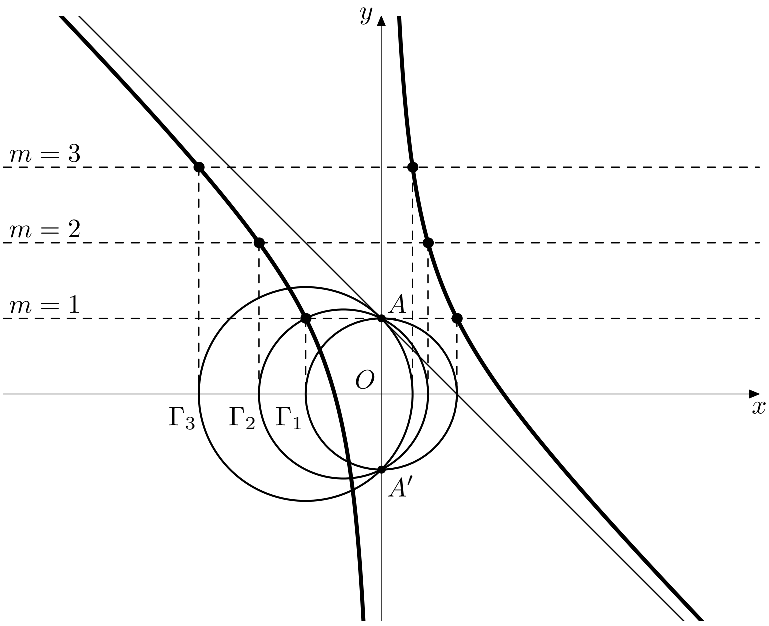

FIG. 5: La courbe d'équation $y = 1 - x + \dfrac{1}{x}$, et la famille de cercles associée

Notons $\gamma(x, y) = x^2 + y^2 - x - 1$, et $d(x, y) = x$. Notons que $\gamma(x, y) = 0$ est l'équation d'un cercle (en fait, le cercle Γ_0), et que $d(x, y) = 0$ est l'équation d'une droite D, plus précisément l'axe vertical.

Pour toute valeur de m, l'équation $\gamma(x, y) + m\delta(x, y) = 0$ est l'équation d'un cercle, puisqu'elle est du second degré en x et y, ne contient pas de termes en xy, et commence par $x^2 + y^2 + \ldots$. C'est notre cercle Γ_m.

Mais tout point $M(x, y)$ appartenant à la fois au cercle Γ_0 et à la droite D vérifie $\gamma(x, y) = d(x, y) = 0$, et donc $\gamma(x, y) + m\delta(x, y) = 0$ quelle que soit la valeur de m. Ce point appartient donc à tous les cercles Γ_m.

Et il se trouve que précisément, les points d'intersection de Γ_0 et de D sont les points A et A'. On parle du *faisceau de cercles* passant par les points A et A', car il est facile de vérifier qu'en faisant varier m, on obtient effectivement *tous* ces cercles.