Algèbre linéaire

I. Espaces, sous-espaces, sommes, bases...

1) ☞ Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Comparer :

   (a) $F \cap (G+H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$,

   (b) $F + (G \cap H)$ et $(F+G) \cap (F+H)$.

2) ★ **Réunions de sous-espaces**

   (a) ☞ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

   (b) ☕ Généraliser le résultat précédent sous la forme suivante : montrer que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}$ étant un corps *infini*, et si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E tous distincts de E, alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i$ est distinct de E.

   (c) Que peut-on dire si l'on ne suppose plus $\mathbb{K}$ infini ? Ou si la famille n'est pas supposée finie ?

3) **Bases**

   (a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.

      i. Montrer que $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

      ii. Montrer que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

   (b) ☞ Pour $\alpha \in [a,b]$, on note $f_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - \alpha|$.
   Montrer que $(f_\alpha)_{\alpha \in [a,b]}$ est une base de l'espace vectoriel des fonctions continues affines par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$.

   (c) ☕ Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.
   Montrer que la famille $(\ln p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

4) ☞ **Hyperplans**

   (a) Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque, et $a \in E \setminus H$. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

   (b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer que F peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans de E.
   Quel est le nombre minimal d'hyperplans nécessaires ?

II. Applications linéaires

1) ☞ Soit E un espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriel de E tels que $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$.
   Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = E_1$ et $\mathrm{Im}(u) = E_2$.

2) ☞★ **Caractérisation des homothéties**

   (a) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

   (b) En déduire que le centre de $\mathscr{L}(E)$ (i.e. l'ensemble $\{f \in \mathscr{L}(E) \ / \ (\forall g \in \mathscr{L}(E)) \ f \circ g = g \circ f\}$) coïncide avec l'ensemble des homothéties de E.

   (c) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Que peut-on dire de $f \in \mathscr{L}(E)$ laissant stable tout sous-espace vectoriel de E de dimension k ?

3) ★**Projecteurs**

(a) ☞ Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

i. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

ii. Préciser alors $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)$.

(b) Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$.
Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur, et préciser $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)$.

4) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe deux scalaires distincts a et b vérifiant $(f - a\,\mathrm{Id}) \circ (f - b\,\mathrm{Id}) = 0$.

(a) Établir l'existence de λ et μ tels que $\lambda\,(f - a\,\mathrm{Id})$ et $\mu\,(f - b\,\mathrm{Id})$ soient des projecteurs.

(b) Prouver que $\operatorname{Im}(f - b\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{Id})$.

(c) Calculer f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

(d) Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et calculer f^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

À titre de complément, il pourra être intéressant d'étudier l'équation $P(f) = 0$, P étant un polynôme du second degré. L'exercice qui précède considère le cas où le discriminant de P est strictement positif.

5) ☞★ **Endomorphismes nilpotents**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ (on suppose $u^{p-1} \neq 0$).

(a) Montrer que pour tout k compris entre 1 et p, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\operatorname{Ker}\left(u^k\right) = \operatorname{Ker}\left(u^{k-1}\right) \oplus F_k$.

(b) Établir que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.

(c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls, et qu'en particulier $p \leqslant n$.

(d) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre, et retrouver ainsi que $p \leqslant n$.

6) ★ **Décomposition de Fitting**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $K_p = \operatorname{Ker}(f^p)$ et $I_p = \operatorname{Im}(f^p)$, en convenant que $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion).

(b) ☕ Montrer que $(\dim(I_{p+1}) - \dim(I_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) i. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \;\; (p < p_0) \Longrightarrow (I_p \neq I_{p+1}) \;\text{ et }\; (p \geqslant p_0) \Longrightarrow (I_p = I_{p_0})$$

ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(p < p_0) \Longrightarrow (K_p \neq K_{p+1})$ et $(p \geqslant p_0) \Longrightarrow (K_p = K_{p_0})$.

iii. Montrer que $p_0 \leqslant n$.

(d) Montrer que $E = I_{p_0} \oplus K_{p_0}$.

(e) Déduire de ce qui précède que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$, où N est une matrice carrée nilpotente et C une matrice carrée inversible.

7) **Transformée de Fourier discrète**

Soit ω une racine primitive n-ème de 1. On pose, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$,

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P\left(\omega^k\right) X^k$$

Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et exprimer son inverse.

III. Matrices

1) (a) ★ Quelles sont les matrices commutant avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$?

   (b) Quelles sont les matrices commutant avec toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$?

2) ★ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer l'existence de deux matrices X et Y appartenant à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X\,{}^tY$. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, et donner la valeur de λ en fonction de A.

3) ☞★ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et φ_A l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi_A(M) = MA$.
   Déterminer la trace et le déterminant de φ_A.

4) ☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes deux à deux distincts, et $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On note

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$$

   Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, dont $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base.

5) (a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.

   (b) Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour toutes matrices A et B.
   Montrer que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

6) ☞★ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \dbinom{j-1}{i-1}$, et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ dont la matrice dans la base canonique est A.

   (a) Exprimer $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   (b) Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$, puis tout $m \in \mathbb{Z}$.

7) ☞★ **Formes linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, trace**

   (a) Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\Phi_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^*$, $A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

   (b) Montrer que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.
   (Indication : si $H = \mathrm{Ker}(\Phi_A)$, distinguer selon que A est diagonale ou pas).

   (c) Soit φ une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ pour toutes matrices M et N. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$.

8) ☕(5/2) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence de $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I + A$
   (Indication : penser au développement limité de $\sqrt{1+x}$).

IV. Déterminants

1) ☞ **Matrices "transparentes" pour le déterminant**

   (a) Chercher les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A + X) = \det(A)$.

   (b) Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A + X) = \det(B + X)$. Que dire de A et B ?

2) On pose $P_n(X) = X^n - X + 1$.

   (a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

   (b) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$.

3) **Comatrice**

   (a) ☞★ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.

(b) ☞ Soit $n \geqslant 2$, et A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

i. Si A et B sont inversibles, montrer que $\operatorname{com}(AB) = \operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B)$.

ii. Montrer par densité que ce résultat est encore vrai si l'on ne suppose plus A et B inversibles.

iii. En déduire que si A et B sont semblables, alors $\operatorname{com}(A)$ et $\operatorname{com}(B)$ le sont aussi.

(c) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que $M^{-1} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

4) Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de U et V dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $UA + VB = I$.

5) ☞ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, dont on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes. On considère la matrice B dont les colonnes sont $D_1, \dots, D_n$, avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i = \sum\limits_{j \neq i} C_j$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

6) ★ **Déterminant de Vandermonde**

(a) Calculer le déterminant $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

On pourra au choix effectuer des combinaisons astucieuses des lignes ou des colonnes, ou bien réfléchir sur la nature de $V(a_1, \dots, a_n)$, et en particulier les cas où ce déterminant est nul.

(b) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{k-1} & \alpha_1^{k+1} & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{k-1} & \alpha_2^{k+1} & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{k-1} & \alpha_n^{k+1} & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$.

7) Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & x_n \end{vmatrix}$ en considérant la fonction $t \mapsto \Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1 + t & & (b+t) \\ & \ddots & \\ (a+t) & & x_n + t \end{vmatrix}$.

Indication : traiter d'abord le cas $a \neq b$.

8) ☕ **Déterminant circulant**

Une matrice circulante est une matrice de la forme $\gamma(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$.

On note $\Gamma(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ son déterminant. Soit $\theta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega(\theta) = \left(\theta^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- Montrer que $\gamma(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})\,\Omega(\theta) = \Omega(\theta)\,D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale telle que $\lambda_j = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_q \theta^{(j-1)q}$.
- En déduire la valeur de $\Gamma(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.
- Application : calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ de deux manières différentes, et retrouver une formule connue (?).

9) ☕ **Déterminant de Cauchy**

(a) ☞ Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout couple (i, j), $a_i + b_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(Indication : après avoir écarté le cas où les a_i ne sont pas deux à deux distincts, on pourra au choix introduire la fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)}$, ou effectuer des combinaisons astucieuses des lignes et des colonnes.

(b) Traiter le cas particulier où $a_i = b_i = i$ pour tout i (déterminant de Hilbert).

(c) Montrer que l'inverse de la matrice $H = \left(\dfrac{1}{i + j - 1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est à coefficients entiers.

V. Dualité

1) ★ **Formes linéaires sur** $\mathbb{K}_n[X]$

   (a) ★★ Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts et $f_0, f_1, \dots, f_n$ les formes linéaires sur $E = \mathbb{K}_n[X]$ définies par $f_i(P) = P(a_i)$.
   Établir que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une base du dual de E, et déterminer sa base antéduale.

   (b) ☞ Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note f_i et g_i les formes linéaires sur $E = \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ définies par :
   $$f_i(P) = P(a_i) \quad \text{et} \quad g_i(P) = P'(a_i)$$
   Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base du dual de E, et en déterminer la base antéduale.
   Application : déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ dont la courbe est tangente en 0 et π à la courbe de la fonction $\sin$.

   (c) Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que[1]
   $$(\forall P \in \mathbb{R}_n[X]) \ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k)$$

2) ☞ Soit H un hyperplan du dual E^* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que
$$(\forall \varphi \in E^*) \ \varphi \in H \iff \varphi(x) = 0$$

3) Soit $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $f_i(x) = 0$ pour tout i.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

4) ★ Soit $f_1, \dots, f_n$ et f des formes linéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que
$$f \in \mathrm{Vect}(()f_1, \dots, f_n) \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f$$

5) Soit $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fonctions linéairement indépendantes. On pose $E = \mathrm{Vect}(()f_1, \dots, f_n)$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$.

   (a) Montrer que la famille $(\delta_x)_{x\in\mathbb{R}}$ engendre E^*.

   (b) En déduire qu'il existe n réels $x_1, \dots, x_n$ tels que la matrice $M = (f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de déterminant non nul.

VI. Systèmes linéaires

1) Soit (S) : $AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

2) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_1^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_2^{n-1} x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_1 + a_n x_2 + \dots + a_n^{n-1} x_n = b_n \end{cases}$$

[1] On peut montrer que pour un choix judicieux des réels $a_0, \dots, a_n$, l'égalité ci-dessous est valable pour des polynômes de degré $2n+1$ (formules de quadrature de Gauss et Newton-Cotes).