Développements limités, développements asymptotiques

I. Pratique des développements

1) Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer (s'il existe !) le développement limité à l'ordre indiqué au voisinage du point indiqué entre parenthèses :

(a) $f(x) = e^{\cos x}$, $4\ (0)$
(b) $f(x) = \sqrt{\tan x}$, $3\ \left(\frac{\pi}{4}\right)$
(c) $f(x) = \operatorname{Arc}\tan \sqrt{\dfrac{1+x}{3+x}}$, $2\ (+\infty)$
(d) $f(x) = \operatorname{Arc}\sin \dfrac{1+x}{2+x}$, $4\ (0)$
(e) $f(x) = \operatorname{Arc}\tan(2\sin x)$, $3\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$
(f) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$, $4\ (+\infty)$
(g) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$, $10\ (0,$ puis $+\infty)$
(h) $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$, $4\ (0)$.

2) Partie principale de la fonction f au voisinage du point indiqué entre parenthèses (dans l'échelle des fonctions puissances) :

(a) $f(x) = a^x - x^a$, (a)
(b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{Arc}\tan(x+1)}{\operatorname{Arc}\tan x}\right)$, $(+\infty)$
(c) $f(x) = \operatorname{Arc}\sin x - \dfrac{x+\alpha x^3}{1+\beta x^2}$, (0)
(d) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{cotan} 2x} - 1$, (0).

3) *Trois méthodes pour un DL*

(a) Former un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
(b) En exploitant le fait que $\tan(\operatorname{Arc}\tan x) = x$, prolonger ce DL à l'ordre 5.
(c) En remarquant que $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$, prolonger ce DL à l'ordre 7.

4) Développement asymptotique de $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ en ∞ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

5) Trouver le polynôme P tel que l'équivalent en ∞ de $u_n = \left(n^3+n^2-3n+1\right)^{1/3} - \sqrt{P(n)}$ soit le plus négligeable possible.

II. Calculs de limites

1) Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+ax^2+2} - \sqrt[3]{x^3+1}\right]^x$

2) On définit $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ si $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $g(0) = 0$.

Montrer que g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis que g' existe et est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Déterminer a et b pour que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} - b\right) = 0$.

4) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

5) On pose $\varphi(x) = x^{\frac{x}{1-x}}$.
Prolonger φ par continuité en 1, préciser $\varphi'(1)$ ainsi que l'équation de la tangente en 1.

6) Déterminer les asymptotes à la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x[\sqrt{1+x^2}\sin\frac{1}{x} - 1]}$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

III. Développements implicites, suites...

1) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $x^n e^x = 1$ admet une unique racine positive qu'on notera x_n.
   (b) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
   (c) Déterminer un développement limité à la précision $\frac{1}{n^3}$ de x_n.

2) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution notée x_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
   (b) Déterminer un équivalent de x_n.
   (c) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n.

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est de limite nulle, et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers ∞.
   (b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\dfrac{1}{u_n} = n + \ln n + \lambda + o(1)$.

IV. Utilisation des DL pour établir les formules de Newton

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme ayant des racines x_1, x_2,...,x_n distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais toutes différentes de 0.
On pose :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\
&\vdots \\
\sigma_k &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

1) En écrivant $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, calculer σ_k en fonction de a_{n-k} et de a_n.

2) Que vaut $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$?

3) Trouver un développement asymptotique en $+\infty$ de $\dfrac{P'}{P}$ à un ordre m quelconque.

4) Par identification, trouver des relations de récurrence permettant de calculer les sommes de Newton $\nu_p = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p$ en fonction des σ_k.

5) Appliquer ces formules pour obtenir $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3$ en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.