Corrigé partiel du TD : DL, DA

I. Développements implicites, suites...

1) (a) Notons $f_n(x) = x^n e^x - 1$. $f_n'(x) = e^x x^{n-1(n+x)}$ est positive sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		x_n		1		$+\infty$
$f_n'(x)$			$+$				
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations justifie l'unicité de x_n, et montre que $(\forall n)\ 0 < x_n < 1$.

(b) De $f_n(x_{n+1}) = -1 + e^{x_{n+1}} x_{n+1}^n = -1 + \dfrac{f_{n+1}(x_{n+1}) + 1}{x_{n+1}} = -1 + \dfrac{1}{x_{n+1}} > 0$, on déduit, d'après la croissance de f_n, que $x_{n+1} > x_n$.
Ainsi, la suite (x_n) est croissante, majorée par 1, donc elle converge vers une limite $L \in]0,1]$.
De $(1)\ x_n = e^{-\frac{x_n}{n}}$, on déduit, comme $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, que x_n tend vers 1.

(c) On peut donc écrire $x_n = 1 + o(1)$. En reportant cette relation dans (1), on obtient :

- $x_n = e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ce qui, reporté dans (1), donne encore :
- $x_n = e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où en reportant encore dans (1) :
- $x_n = e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{2n^3} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}\right) - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} - \dfrac{8}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

On voit qu'une fois la pompe amorcée, le procédé pourrait se poursuivre sans fin !

2) (a) Un petit dessin ou une étude de fonction prouve facilement que l'équation $(1)\ \tan x = x$ admet une unique solution notée x_n dans tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

(b) De $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, on déduit immédiatement : $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$.

(c) Encore une fois, la pompe est amorcée. Posons $x_n = n\pi + y_n$. On sait déjà que $-\dfrac{\pi}{2} < y_n < \dfrac{\pi}{2}$.
Donc on peut transformer la relation (1) en :

$$y_n = x_n - n\pi = \operatorname{Arc}\tan x_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x_n}$$

Comme x_n tend vers l'infini, on en déduit que y_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Posons encore $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + z_n$, avec $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a $\dfrac{\pi}{2} + z_n = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan \dfrac{1}{x_n}$, d'où :

$$z_n = -\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$$

d'où $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Le procédé pourrait se poursuivre en précisant le développement de $\operatorname{Arc}\tan \dfrac{1}{x_n}$ (on remarque qu'on a "deux temps d'avance" entre la précision des termes de part et d'autre du signe $=$ de la relation (1)).

3) (a) On montre facilement par récurrence que $u_n \in]0,1[$ pour tout n, et que (u_n) est décroissante. Ainsi, (u_n) converge vers une limite ℓ, qui ne peut être qu'un point fixe de la fonction $x \mapsto x - x^2$. Il n'y en a qu'un, 0. Ainsi (u_n) converge vers 0 en décroissant.

Soit α un réel. On a :

$$u_{n+1}^{\alpha} = \left(u_n - u_n^2\right)^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left(1-u_n\right)^{\alpha} = u_n^{\alpha} - \alpha u_n^{\alpha+1} + o\left(u_n^{\alpha+1}\right)$$

En prenant $\alpha = -1$, on obtient : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$. D'après le théorème de Césaro appliqué à la suite (v_n), la suite de terme général

$$w_n = \frac{v_0 + v_2 + \cdots + v_{n-1}}{n} = \frac{\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}}{n}$$

converge aussi vers 1, ce qui nous donne : $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} n$, soit $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

(b) La suite de l'exercice nécessite quelques connaissances sur les séries. On reprend notre développement :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}\left(1 + u_n - u_n^2 + O\left(u_n^3\right)\right) = \frac{1}{u_n} + 1 - u_n + O\left(u_n^2\right)$$

d'où

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - 1 = -u_n + O\left(u_n^2\right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si nous sommons de telles relations, nous obtenons :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} - n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + x_n$$

(x_n) étant une suite convergente. Or d'après la relation d'Euler, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Regroupant toutes les constantes obtenues, on obtient bien :

$$\frac{1}{u_n} = n + \ln n + \lambda + o(1)$$

On aurait aussi pu recourir au théorème de sommation des équivalents de la théorie des séries, qui est une forme plus générale du théorème de Césaro.

II. Utilisation des DL pour établir les formules de Newton

1) Lorsque l'on développe le produit $P = a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$, on choisit dans chaque facteur $X - x_k$ du produit soit le X, soit le x_k.

Pour obtenir un monôme de degré $n-p$, on doit choisir $n-p$ facteurs pour lesquels on prend X, et donc p facteurs dans lesquels on prend la racine. Si l'on recense toutes les manières de faire cela, on constate que le coefficient de X^{n-p} dans ce développement est

$$a_n \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} \left(-x_{i_1}\right)\left(-x_{i_2}\right)\ldots\left(-x_{i_p}\right) = (-1)^p\, a_n \sigma_p$$

Comme d'autre part le coefficient de X^{n-p} est aussi a_{n-p}, on obtient les relations bien connues :

$$(\forall p \in [\![1,n]\!])\ \ \sigma_p = (-1)^p\, \frac{a_{n-p}}{a_n}$$

2) Si l'on appelle $y_1, \ldots, y_r$ les racines *distinctes* de P, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, alors

$$P = a_n \prod_{i=1}^{r} (X - y_i)^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad P' = a_n \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(X - y_i\right)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(X - y_j\right)^{\alpha_j}$$

$\dfrac{P'}{P}$ s'écrit donc :

$$\frac{P'}{P} = a_n \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{X - y_i}$$

ce qu'on peut d'ailleurs encore écrire

$$\frac{P'}{P} = a_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}$$

3) Développons l'un des termes $\dfrac{1}{X - x_i}$ en $+\infty$ à l'ordre m, en posant $Y = \frac{1}{X}$:

$$\frac{1}{X - x_i} = \frac{1}{X}\frac{1}{1 - \frac{x_i}{X}} = Y \frac{1}{1 - x_i Y} = Y \sum_{k=0}^{m-1} x_i^k Y^k = \sum_{k=1}^{m} x_i^{k-1} Y^k$$

En sommant toutes ces relations, on obtient :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} \right) \frac{1}{X^k} = \sum_{k=1}^{m} \nu_{k-1} \frac{1}{X^k}$$

Ainsi, le coefficient de Y^{k+1} dans ce développement est ν_k, k-ième somme de Newton associée aux réels $x_1, \ldots, x_n$.

4) Utilisons le fait que $P' = \dfrac{P'}{P} P$, et développons :

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1} (r+1)\, a_{r+1} X^r &= \left(\sum_{p=0}^{n} a_p X^p \right) \left(\sum_{q=1}^{m} \nu_{q-1} \frac{1}{X^q} \right) \\ &= \sum_{r=-m}^{n-1} \left(\sum_{p-q=r} a_p \nu_{q-1} \right) X^r\end{aligned}$$

Par identification de ces deux développements de P', on obtient :

- pour $r = n-1$, $n a_n = a_n \nu_0$,
- pour $r = n-2$, $(n-1)\, a_{n-1} = a_n \nu_1 + n a_{n-1}$,
- pour $r = n-3$, $(n-2)\, a_{n-2} = a_n \nu_2 + a_{n-1} \nu_1 + n a_{n-2}$,
- $\vdots$
- pour $r = n-k-1$, $(n-k)\, a_{n-k} = a_n \nu_k + a_{n-1} \nu_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1} \nu_1 + n a_{n-k}$,
- $\vdots$
- pour $r = 0$, $a_1 = a_n \nu_{n-1} + a_{n-1} \nu_{n-2} + \cdots + a_2 \nu_1 + n a_1$,
- pour $r = -k < 0$, $0 = a_n \nu_{n+k-1} + a_{n-1} \nu_{n+k-2} + \cdots + a_2 \nu_{k+1} + a_1 \nu_k + a_0 \nu_{k-1}$.

Reste à diviser de part et d'autre par a_n pour obtenir les *relations de Newton* :

$$\boxed{(\forall k \in [\![1, n-1]\!]) \;\; \nu_k = \sigma_1 \nu_{k-1} - \sigma_2 \nu_{k-2} + \sigma_3 \nu_{k-3} + \cdots + (-1)^k \sigma_{k-1} \nu_1 + (-1)^{k+1} k \sigma_k}$$

et

$$\boxed{(\forall k \geqslant n) \;\; \nu_k = \sigma_1 \nu_{n-1} - \sigma_2 \nu_{n-2} + \sigma_3 \nu_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \nu_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n \nu_{k-n}}$$

5) Les trois premières relation de Newton s'écrivent :

$$\nu_1 = \sigma_1, \qquad \nu_2 = \sigma_1 \nu_1 - 2\sigma_2 \quad \text{et} \quad \nu_3 = \sigma_1 \nu_2 - \sigma_2 \nu_1 + 3\sigma_3$$

En reportant de proche en proche, on obtient $\nu_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, et

$$\nu_3 = \sigma_1 \left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \right) - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3$$

soit

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = \nu_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3}$$

formule qu'il n'est pas indispensable de retenir ! Il est toutefois bon d'avoir déjà rencontré ces relations, la seule connaissance de leur existence permettant d'avancer dans certains exercices.